

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Показано, что математический аппарат, построенный на базе теории тензоров, позволяет наиболее полно, компактно и взаимосвязано по отношению к ведущим параметрам описывать сложнейшие турбулентные течения реальных жидкостей и газов. На примере потенциальных потоков продемонстрирован физический смысл тензора Князева. It is shown, that mathematical means on the basis of tensor theory permits more completely, briefly and interconnected describe the main parameters of complicated turbulent flow of real liquids and gases. The physical meaning of Knjazev tensor is demonstrated on the example of potential flows.

Ключевые слова: турбулентность, вихрь, волна, тензор.
Keywords: turbulence, vortex, wave, tensor.

Теоретическая газовая динамика в настоящее время наиболее адекватно представляется уравнением Навье-Стокса, учитывающим все свойства реальных жидкостей и газов. К этим свойствам в первую очередь относятся вязкость, сжимаемость, и, если это требуется, теплопроводность. В самом широком смысле, при учете всех свойств не только газов, но и всех веществ, за исключением твердой фазы, таких как жидкость, газ и плазма, следует отметить электропроводность, магнитопроводность, и, может быть, степень черноты газа. Но! Эти нюансы не влияют практически на "чистый" газ и в уравнении Навье-Стокса они естественно опускаются. Их необходимо учитывать в специальных случаях, например, когда газ начинает диссоциировать или излучать. Или когда рабочее тело подвержено воздействию электромагнитного поля и т.д. В связи с этим уравнения движения, описывающие реальную ситуацию, существенно упрощаются в силу отсутствия характерных для перечисленных выше процессов параметров.

Методологически все начиналось с векторного уравнения Леонарда Эйлера, запись которого явилась воплощением умозрительного закона Паскаля, который показал решающую роль давления на производство скорости (ускорения) течения жидкости и наделил этот параметр свойством полевой переменной, в виде скалярной функции точки [1]

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P.$$

Это, в то время, новое революционное представление газодинамических параметров позволило рассчитывать полностью поля любых областей всевозможных видов течения в координатах пространства и времени. Достаточно было лишь правильно задать начальные и граничные условия.

В те романтические времена, когда зачастую помимо Российской Академии наук, Леонард Эйлер излагал свои великие достижения в "письмах немецкой принцессе о разных физических и философских материях", мало кого интересовали такие "мелочи", как вязкость и сжимаемость. Все было идеально. Даже уравнение Эйлера в дальнейшем стали называть, и по сей день называют, уравнениями для идеального газа. Но пришло время практических действий. Начали строить пароходы и другие "капиталистические" конструкции. Жизнь жестко потребовала уточнить эти уравнения с целью, например, обосновать правильность выбора количества топлива для двигателя, дабы избежать остановки корабля посреди океанских просторов. Ученые люди начали поговаривать о трении, которое "съедает" большую часть мощности, вырабатываемую паровым двигателем. И тогда появились уравнения Навье-Стокса. Видимо, уместно сказать, что между двумя этими учеными именами следовало бы написать, по крайней мере, еще пять имен великих ученых, но для краткости мы всех причастных к этому ученых с благоговением и благодарностью включаем в содержимое этой драгоценной черточки. Среди них особое место занимает великий французский математик и механик Огюстен Луи

Коши, который сделал крупный шаг в развитии гидродинамической теории, введя на тот момент новое понятие - тензор напряжений. После этого уравнение Эйлера превратилось из идеального в реальное. Конечно, потребовались немалые усилия, чтобы привести его (уравнение Навье-Стокса) к современному виду, к такому виду, с помощью которого стало бы возможным решать самые сложные научные и инженерные задачи.

По-видимому, уравнение Навье-Стокса на сегодняшний день является наиболее правильным газодинамическим уравнением, учитывающим практически все особенности сложных течений подвижных сред. Беря его за основу, мы избавляем себя от возможности неправильных решений задач, связанных с турбулентными потоками, ударными волнами, отрывами и т.д.

В гидро-газотехнике для окончательного построения уравнения Навье-Стокса дополнительно требуется соотношение, которое связывает деформационные члены с членами напряжений, возникающими в потоке. Другими словами требуется связь тензора напряжений и тензора скоростей деформации. При этом оговаривается, что для гидромеханики Навье-Стокса справедливыми являются соотношения, описывающие только ньютоновские жидкости. Другие соотношения для неньютоновских жидкостей применяются в специальной науке для вязких жидкостей - реологии.

Таким образом, для оформления векторного уравнения Навье-Стокса, или просто вектора Навье-Стокса [2], непременно потребовался математический аппарат тензорного исчисления. Обычный специалист, как правило, мало обращает внимания на эту сторону проблемы в силу того, что все тензорно-векторные операции являются промежуточными, и в итоге сводятся только к векторным. Это понятно по одной простой причине. Вектор можно наглядно представить. Это отрезок со стрелкой в нужном направлении и начало этого отрезка в виде точки, из которой он выходит. Кстати, эта точка и есть самый главный атрибут полевого представления параметров поля.

А вот тензор - это чисто математическая конструкция. Его нельзя (ну, скажем, когда-нибудь и будет можно, но сегодня - нельзя) представить в виде материализованного объекта. Это - объект идеализированный. Он находится выше наших человеческих чувств, и поэтому мы его воспринимаем как математическую структуру. Эта математическая структура, хоть и является идеализированной и умопониماемой, но каждый ее элемент является материальным. Здорово получается. Берем материально ощутимые объекты, проводим над ними совершенно понятные действия и "сумма" превращается в идеализированный математический объект.

Таким образом, совокупность трех (конечно, бывает и больше) векторов P_1, P_2, P_3 , преобразующихся по определенным формулам в другие величины P'_1, P'_2, P'_3 , находящихся в другой системе координат, и представляющих собой новую величину Π , называется аффинным ортогональным тензором второго (может быть, и большего) ранга. Записывается тензор условно в виде матрицы:

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{Bmatrix}.$$

Сопряженным тензором является тензор, у которого относительно основной диагонали произведена перестановка членов (скаляров):

$$\mathbf{P}_c = \begin{Bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{Bmatrix}.$$

Симметричным является тензор, у которого при такой перестановке ничего не изменилось: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_c$ или $P_{kl} = P_{lk}$.

Если $P_{kl} = -P_{lk}$, то тензор называется антисимметричным. Для нашего анализа потребуется теорема, в соответствии с которой, всякий тензор можно разложить и при том единственным образом на сумму двух тензоров: симметричного и антисимметричного. Подробные доказательства этой теоремы и всего изложенного выше представлены в великолепной монографии Н.Е. Кочина [3]. Материалы из этой монографии в дальнейшем помогут нам разобраться со сложнейшими нюансами тензорного исчисления применительно к вопросам турбулентности.

Фундаментальный тензор Коши

Введение этого тензора в качестве нового инструмента как общего аппарата познания сложнейших аспектов турбулентности является фактом весьма значительным и поворотным во всей газовой динамике. Известно, что напряженное состояние элемента жидкости, находящейся под воздействием внешних факторов можно коротко описать тензором в виде матрицы. Этот тензор называется тензором Коши, и записывается следующим образом:

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}.$$

В краткой лаконичной форме Коши была записана сложнейшая система уравнений Навье-Стокса. После чего эти уравнения можно было наглядно представить в векторной форме и показать каждую составляющую и ее место с целью аналитического исследования турбулентных течений. Для конкретизации и привязывания этого тензора к полевым параметрам потребовалось реологическое соотношение. Окончательно оно было сформулировано Джорджем Габриэлем Стоксом. Это реологическое соотношение было записано в виде тензорного уравнения:

$$\mathbf{P} = -\mathbf{P}I + 2\mu\mathbf{D},$$

где тензор $\mathbf{D}$ является тензором скоростей деформации [4], а I – единичный тензор, μ – динамическая вязкость.

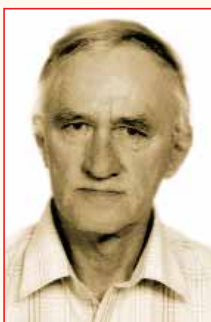
Введенный Коши новый тензор позволил расставить на свои места нормальные и касательные напряжения, что дало возможность вычленив в дальнейшем элементарные виды движений. Так, например, стало понятным, как ведут себя поступательное и вращательное движения. Дальнейшее представление этого



Великий французский математик и механик
Огюстен Луи Коши



Известный советский математик и газодинамик
Николай Евграфович Кочин



Замечательный русский математик и газодинамик
Владимир Андреевич Князев

тензора и связанного с ним тензора скоростей деформации позволило представить компоненты уравнения Навье-Стокса в виде комбинаций скоростей реального потока. Появилась возможность рассчитать поле скоростей вязкого сжимаемого потока. Это значит, что появилась возможность аналитически исследовать тончайшие аспекты турбулентного течения и объяснить с помощью уравнений математической физики многие эффекты газовой динамики.

Тензор градиента скорости

Раскрывая субстанциональную производную в уравнении Навье-Стокса, мы получаем некоторую запись практически в тензорном виде. При этом понимаем, что из-за некоторых операций она по размерности и по существу становится векторной:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + \vec{V} \text{grad} \vec{V} = \frac{1}{\rho} \text{div} \mathbf{P}.$$

Действительно, появился новый тензор $\text{grad} \vec{V}$. Что он из себя представляет? Во-первых, разложим его в виде матрицы

$$\text{grad} \vec{V} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix}.$$

Этот тензор является сопряженным тензором, производным от вектора $\vec{V}$ по вектору $\vec{r}$

$$\frac{d\vec{V}}{d\vec{r}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix}.$$

Теперь по правилам тензорного анализа разложим производный вектор $d\vec{V}/d\vec{r}$ на симметричную и антисимметричную части. Симметричный тензор будет выглядеть следующим образом [3]

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_2}) & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}(\frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_3}) & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{array} \right\}.$$

И в том случае, когда вектор $\vec{V}(\vec{r})$ представляет собой вектор смещения частиц упругого тела, этот вектор является деформационным тензором, о котором мы уже говорили, исследуя тензор Коши. Другими словами, симметричная часть тензора градиента скоростей есть тензор Коши.

Антисимметричную часть упомянутого выше тензора можно в соответствии с [3] представить в виде:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right\},$$

где $\vec{\omega} = (1/2) \text{rot} \vec{V}$.

Отсюда следует весьма любопытный вывод. Если $\vec{\omega} = 0$, то есть течение потенциальное, и его можно представить как $\vec{V} = \text{grad} \phi$, то тензор Коши симметричен, тогда все компоненты этого тензора, отраженные от диагонали, являются равными. Этот факт и зафиксирован в реологическом соотношении при выводе уравнения Навье-Стокса.

Фундаментальный тензор Князева

Если вспомнить, в каких предпосылках выводилось уравнение Навье-Стокса, то становится ясным, что это уравнение было полу-

чено при молчаливой договоренности использования псевдоотверждения жидкой точки. То есть считалось, что маленький объемчик, выделенный из всего поля частиц жидкости или газа, был твердым. Другими словами, ему нарекали статус точки, и поэтому все выводы, полученные для данной ситуации, можно было строго трактовать как динамику центра масс. К счастью, формализация Навье-Стокса не пострадала, а вот уравнения момента импульса и энергии это почувствовали. Причем внутреннее движение относительно центра масс не изменяет импульса тела, и формальная запись самого векторного уравнения сохраняется.

В работе [1] подробно разбирается ситуация, связанная с интерпретацией момента количества движения и энергии потока. По мнению автора упомянутой монографии, запись уравнений для этих параметров исказится формально, а по существу в рамках гипотезы псевдоотверждения жидкой точки может привести к неправильным результатам. Для исправления ситуации автор предлагает ввести новую полевую переменную - динамический тензор $\mathbf{K}$, поток которого $\oint \mathbf{K} \mathbf{n} ds$ на некоторую замкнутую поверхность равен импульсу рабочего тела (жидкости или газа), ограниченного этой поверхностью. По определению $\text{div} \mathbf{K} = \rho \vec{V}$, то есть дивергенция от динамического тензора $\mathbf{K}$ характеризует скорость центра масс этого рабочего тела. И тогда, уравнение импульса некоторого жидкого тела (интегральное уравнение импульса) можно представить как тензор уже известных нам напряжений $\mathbf{P}$:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{K} \mathbf{n} ds = \int \mathbf{P} \mathbf{n} ds.$$

Дальнейшие преобразования приводят нас к аналогичной записи уравнения Навье-Стокса. Применение тензора Князева не меняет вида локального уравнения импульса, поскольку внутренние движения относительно центра масс и внутренние силы не изменяют импульса тела. Введение нового полевого тензора $\mathbf{K}$ позволяет выделить энергию относительно движения "жидкой" точки и установить нетождественность необратимой мощности внутренних сил и диссипации. Кроме того, изменение энергии относительно движения "жидкой" точки равно разности рассеянной мощности внешних сил, диссипации и необратимой мощности внутренних сил. В естественном процессе, согласно второму закону термодинамики, необратимая мощность внутренних сил должна быть неотрицательной величиной (положительное производство энтропии), в то время как диссипация всегда неотрицательна. Гидромеханика, построенная с использованием полевого динамического тензора Князева, содержит в себе механизм управления потоком (подробнее в [1]), который обеспечивает безусловное выполнение требований термодинамики.

Потенциальные течения

Отметим два потенциальных течения, которые являются следствием изложенного выше материала.

1. Потенциальное течение $\vec{V} = \text{grad} \phi$ приводит к ситуации, когда тензор $\text{grad} \vec{V}$ становится симметричным. При этом антисимметричный тензор, содержащий в качестве компонентов значения угловой скорости потока $\vec{\omega}$, становится равным нулю. То есть в этот момент тензор $\text{grad} \vec{V} = \mathbf{D}$ и равен тензору скоростей деформаций. Это очень любопытный факт, который говорит о том, что конвективный член уравнения Навье-Стокса, а главное, и уравнения Эйлера, имеет в своем составе математическую конструкцию, описывающую деформируемый поток. Другими словами вектор скорости помимо всего прочего представляет собой вектор смещения упругой среды. А если есть вектор смещения упругой среды, то в соответствии с реологическим соотношением можно предположить наличие касательных напряжений. А откуда они взялись в уравнении Эйлера? Вот вопрос. После этого уравнение Эйлера точно нельзя называть уравнением для идеального газа. Нам и раньше было известно из теоремы Ламба-Громеки, что уравнение Эйлера содержит турбулентный член в ускорении Кориолиса, и тогда уже было понятно, что оно (уравнение Эйлера) описывает не только ламинарные течения. Теперь, когда прове-

ден тензорный анализ и показано, что в нем содержится тензор, имеющий деформационные компоненты, в том числе касательные напряжения, этот факт, несомненно, подтверждается.

2. Если считать потенциальным течением поток, который можно записать в виде $\rho \vec{V} = \text{grad} \psi$, тогда можно получить очень интересные преобразования тензора Князева. Но вначале порассуждаем, что это такое - тензор Князева. Ведь Владимир Андреевич его просто ввел, дабы получить полевую переменную. Но он совсем не раскрыл его существа. Конечно, тензор не должен иметь материальную базу. Он - тензор. Он - математическая конструкция. Но: не скрывается ли здесь сюрприз? Допустим, что есть некий тензор, и он каким-то неизвестным нам образом описывает микромир внутри той самой "жидкой" точки. Если взять от него дивергенцию, то мы получаем как бы мостик в нашу реальность, в наш грешный макромир. Учитывая это, попробуем теперь преобразовать потенциал ψ в зависимости от этого тензора. Выразим его через дивергенцию:

$$\text{grad} \psi = \text{div} \psi \cdot \mathbf{I} \text{ или } \rho \vec{V} = \text{div} \psi \cdot \mathbf{I}.$$

Здесь опять же $\mathbf{I}$ - единичный тензор, который равен

$$\mathbf{I} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Если считать, что этот тензор несущественен и играет только роль оператора, то можно сказать, что тот внутренний микромир со своими движениями молекул внутри "жидкой" точки, из которого как бы рождается реальный поток, также зависит от потенциала импульса, и импульс является универсальным параметром газовой динамики. 

Литература

1. В.А. Князев. Гидромеханика без гипотезы псевдоотверждения жидкой точки, изд. LAP LAMBERT Academic Publishing, Германия, 2014 г.
2. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Вектор Навье-Стокса // Двигатель № 6, 2014 г.
3. Н.Е. Кочин. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М. изд. Академии наук СССР, 1951 г.
4. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М. Наука. 1974 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com



Яхта "Москва" Императора России Александра III