УДК 532.2

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ.
ВЕКТОР НАВЬЕ-СТОКСА

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Сформулировано новое понятие в газодинамической науке - вектор Навье-Стокса (ВНС). Показана с помощью дисперсионного уравнения (дисперсионного турбулентного вектора), являющегося одной из форм представления ВНС, возможность расчета чисто турбулентных течений.

A new conception in gas dynamic science is formulated, namely Navier-Stocks vector (NSV). It is shown a possibility of calculation of pure turbulent flows with a help of dispersion equation (dispersion turbulent vector), which is one of the forms of NSV representation.

Ключевые слова: ***турбулентность, вихрь, волна.***

Keywords: ***turbulence, vortex, wave.***

В первой статье автора [1], посвященной проблеме турбулентного движения реальных жидкостей, газов и плазмы, утверждалось, что турбулентность отнюдь не хаос, но тонкоорганизованная структура, была ссылка на концепцию Ландау, согласно которой утверждалось, что турбулентность сводится к постадийному усложнению исходного движения путем развития соответствующих неустойчивостей. При этом каждая стадия завершается насыщением наблюдаемого возмущения. В соответствии с этой схемой некое возмущение, возникающее первоначально в силу неустойчивости ламинарного стационарного течения, развивается вначале по линейным законам, а затем, во всех точках пространства одновременно переходит в нелинейную стадию насыщения и таким образом возникает новое ламинарное, но уже не стационарное движение. Это последнее движение, в свою очередь, начиная с некоторых чисел Рейнольдса, также теряет устойчивость, возникает новое возмущение, которое пройдя также стадию насыщения, приводит к появлению нового, более сложного нестационарного ламинарного течения и так далее, до тех пор, пока не появится очень сложное нестационарное ламинарное течение, которое и отождествляется с турбулентным. Такая интерпретация концепции Ландау и конкретизация В.Н. Жигулевым в работе [2] путем оценок масштабов некоторых устойчивых зон, тем не менее, не позволила ему развить эту концепцию в части понимания локальных высокодифференцированных нелинейных процессов. Это непонимание началось после области волн Толмина-Шлихтинга, в момент, когда начались рассуждения о пятнах Эмондса. Строгая математика закончилась после линейного уравнения Орра-Зоммерфельда и еще более простого уравнения Релея, которыми в свое время пользовались как инструментами Толмин и Шлихтинг. Дальнейшие упрощенные математические выкладки из данной работы, к сожалению, не дали нового практического качества. Уж очень сильно представленные соотношения в виде рядов и интегралов отошли от фундаментального уравнения Навье-Стокса. Кстати, и гипотеза Ландау об изменении квадрата амплитуды возмущения является весьма умозрительной и страдает недостатком опоры ее на эмпиризм. И еще! Непонятно "кто возмущается": поток или пульсация? Тем не менее, размышления Ландау о структуре течения просто великолепны. Академик очень логично и философски последовательно доказывает идею о том, что поток всегда ламинарный. Он, может быть, очень сложный для понимания, так как зачастую изменения в нем весьма скоротечны и мелкомасштабны. Никакой прибор, тем более глаз, порой не различит в потоке ту гармонию ламинарных движений, которую можно назвать путаницей, образованной линиями тока, что совершенно противоположно понятию "рейнольдсовская турбулентность".


Вильям Мак-Фадден Орр, ирландский математик


Арнольд Иоганнес Вильгельм Зоммерфельд, немецкий физик

Итак, мы пришли к "парадоксальному" выводу, когда два величайших ученых своего времени Осборн Рейнольдс и Лев Давыдович Ландау об одном и том же явлении утверждали совершенно противоположное. Рейнольдс говорил, что турбулентность случайна, и подчиняется статистическим законам, а Ландау - что этот процесс предсказуемый, и даже пытался описать его с помощью уравнений математической физики.

К сожалению, в настоящее время все больше и больше программных продуктов, разработанных как на Западе, так и в России, опираются на концепцию Рейнольдса. Разработчики говорят, что уравнения Рейнольдса, описывающие турбулентность, являются и осредненными, и приближенными [3], и по ним можно считать, но... они неправильные. Неправильные в силу своей основной посылки - представления суммы векторной величины в виде обыкновенного алгебраического сложения. Второстепенным, но весьма существенным является то, что процесс выделения уравнений Рейнольдса из уравнений Навье-Стокса пестрит многочисленными предположениями и допущениями (линейная зависимость тензора перемещений от тензора рейнольдсовских напряжений в реологическом уравнении, волюнтаризм при выборе для расчетов эмпирических "плосковоздушных холодных" моделей турбулентности, декларирование правил осреднения Рейнольдсом и т.д.).

В сложившейся ситуации остается один путь достижения истины. Это изучение того бесценного, хотя и весьма ограниченного багажа эмпирических фактов (нетленные экспериментальные факты Тейлора и Гертлера, великолепные работы Толмина и Шлихтинга, замечательные научные находки Кельвина и Гельмгольца, потрясающие воображение тороидальные вихри Бенара и т.д.), а также кропотливый систематический и скрупулезный анализ основополагающих фундаментальных уравнений, среди которых первое место занимает векторное уравнение Навье-Стокса, описывающее как ламинарное, так и турбулентное течения.

Основополагающие теоремы газовой динамики

В результате систематического целенаправленного исследования уравнения Навье-Стокса удалось доказать несколько теорем, которые легли в основание новой торсионно-волновой парадигмы, являющейся альтернативой традиционной рейнольдсовской парадигмы турбулентности.

Теорема 1 (об элементарных движениях)

Любое сложное турбулентное течение можно представить как комбинацию элементарных движений жидкости и газа: волнового, поступательного, вращательного и торсионного [4].

Данная теорема является расширением теоремы Гельмгольца путем перехода к рассмотрению не кинематических, а динамических характеристик потока. Конкретизируется понятие "деформационная скорость", и взамен ей вводится понятие "кручение" (торсионное движение). Теорема доказывается путем преобразования уравнения Навье-Стокса и выделения членов, содержащих элементарные движения

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau}+\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}P+\operatorname{grad}\frac{\vec{V}^2}{2}-\frac{4}{3}\nu\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}\right)+[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}]+\nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}=0.$$

Действительно, здесь первый член характеризует волновое движение, и является второй производной по координате. Второй член в виде суммы, заключенной в круглые скобки, содержит операцию градиент. Это - характеристика поступательного движения. Третий член в квадратных скобках содержит операцию $\operatorname{rot}\vec{V}$ и является характеристикой вращательного движения. Четвертый член $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}$ характеризует кручение. Это торсионный член.

Теорема 2 (о соотношении элементарных движений)

Скалярное произведение вектора скорости $\vec{V}$ и кручения $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}$ равно квадрату вектора $\operatorname{rot}\vec{V}$

$$\vec{V}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}=\operatorname{rot}^2\vec{V}\quad [5].$$

Теорема 3 (о кинетической энергии)

Значение кинетической энергии вязкого несжимаемого газового потока представляет собой интеграл от произведения его скорости на лапласиан скорости

$$E_к=\mu\int_0^{\tau_к} V\Delta V\,d\tau\quad [5].$$

Теорема 4 (о возникновении автоколебаний)

Автоколебания в турбулентном потоке возникнут в случае выполнения необходимого и достаточного условий. Необходимым условием возникновения колебаний в подвижной сплошной среде является выполнение неравенства Филина-Зенина [6]

$$ФZ > 1/4\,.$$

Достаточным условием является постоянство произведения

$$\rho\omega^4=\text{const},$$

где ρ - плотность потока; ω - угловая скорость турбулентных вихрей.

Теорема 5 (о ламинарности сверхзвукового потока)

В сверхзвуковом потоке турбулентность отсутствует. Течение в сверхзвуке всегда ламинарное [7].

В работе [7] было также показано, что в диапазоне коэффициентов адиабаты к = 1,12...1,4 и углах наклона контура на входе в профилированную часть сопла больше 12° пограничный слой также является ламинарным. При этом изолиния чисел Маха М = 1 тонет внутри ламинарного подслоя. Ее расстояние до стенки на порядок меньше, чем толщина ламинарного подслоя.

Доказанные теоремы позволили решить ряд практически важных задач для ЖРД и РДТТ. Если вернуться к рассмотрению проблемы газовой динамики по-крупному, без незначительных нюансов, то можно определенно сказать, что для ЖРД сопловых газодинамических проблем в настоящее время нет. Все сверхзвуковые проблемы снимаются техническим образом - с помощью использования регенерационного охлаждения, и сопло при работе не меняет своей геометрии. В ЖРД актуальной остается проблема ВЧ, которая на сегодняшний день в традиционном подходе если и не решена, то решена на примитивном уровне.

В РДТТ все наоборот. Там проблем в дозвуке нет. Задача разгара зарядов решена весьма квалифицированно и однозначно. Но! В сверхзвуковых соплах РДТТ проблема остается очень острой из-за разгаров внутренней стенки сопла. Традиционно используемые газодинамические программы и программы выбора контуров в свете этой проблемы оставляют желать лучшего. Все эти программы либо базируются на уравнениях Рейнольдса, либо на уравнениях Эйлера. Причем последние уравнения применяют для расчета сверхзвуковых течений ошибочно. Ведь они не учитывают не только вязкость, но и основное свойство сверхзвукового потока - сжимаемость.

Почему всё так происходит? Почему хорошие подчас специалисты не решают задачу Навье-Стокса? Потому что все успокоились и превратились в решалки и считалки уравнений Рейнольдса. Смирились с тем, что предшественники сделали все правильно. Но это не так. Не всё в теории они сделали правильно, и поэтому сейчас как никогда необходимо вернуть уважение к аналитическому мышлению. Пора прекратить относиться к программным продуктам, особенно западным, как к иконам. Это не иконы, а скорее наоборот - территория заблуждений. В любом случае, расчетным способом проводить исследования некорректно, так как в расчетных программах их разработчиками заложены не всегда правильные решения.

Вектор Навье-Стокса

Итак, в настоящее время наиболее адекватное природе газодинамических явлений является уравнение Навье-Стокса. Это уравнение нагляднее всего можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau}+\operatorname{grad}E+[\operatorname{rot}\vec{V}\times\vec{V}]+\nu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}=0.$$

Здесь кроме известных членов уравнения появился grad E, который неявным образом зависит от потенциальной, кинетической и диссипативной энергии. По существу он является некоторой обобщенной механической энергией. Такой прием представления удобен для анализа векторного уравнения.

Очевидно, что каждый из четырех членов уравнения является вектором. Это означает, что их алгебраическая сумма - тоже вектор, вектор Навье-Стокса (ВНС). Поэтому для его нахождения возможно пользоваться правилами векторного анализа, в данном случае операцией геометрического сложения векторов. При этом следует учитывать, что каждый из представленных векторов в пространстве направлен по-разному. Первый член, инерционный, отвечающий за волновые движения, по сути, является ускорением потока. Причем направление этого вектора зависит от направления касательного и нормального ускорения. Касательное ускорение всегда направлено вдоль линии тока также как и абсолютная скорость потока. Нормальная составляющая абсолютного ускорения существенным образом зависит от кривизны линии тока, и направлена вдоль радиуса ее кривизны. Оно перпендикулярно касательному ускорению. Второй вектор grad E всегда направлен вдоль линии тока. Он генерирует основное, поступательное движение и следует за направлением скорости. Третий и четвертый векторы - кориолисова ускорения и кручения - существенным образом зависят от взаимного направления абсолютной скорости $\vec{V}$ и rot $\vec{V}$. Покажем двумя способами, что операция rot меняет направление вектора строго на 90°.

Первый способ. Рассмотрим задачу нахождения плоскостей, перпендикулярных трубкам тока.

Элементарные (построенные на бесконечно малом контуре) трубки тока, каково бы ни было поле скоростей, допускают проведение нормальных к ним сечений, причем с точностью до малых высших порядков эти сечения могут рассматриваться как плоские. Иначе обстоит дело с трубками тока конечного размера. Для того чтобы такие трубки имели сечения, нормальные к линиям тока внутри трубок и на их поверхности, необходимо выполнение условия существования поверхностей, нормальных к линиям тока.

Рассмотрим семейство поверхностей $\varphi(x, y, z)$ = const, пересекающих линии тока. Условием ортогональности линий тока этим поверхностям будет

$$\operatorname{grad}\varphi=\lambda\vec{V},$$

где λ - скалярная функция.

Взяв от обеих частей этого векторного равенства операцию ротор, слева получим нуль, а справа, согласно правилам векторного анализа соотношение

$$\operatorname{rot}(\lambda\vec{V})=\lambda\operatorname{rot}\vec{V}+[\operatorname{grad}\lambda\times\vec{V}].$$

Умножая обе части, таким образом, полученного равенства

$$0=\lambda\operatorname{rot}\vec{V}+[\operatorname{grad}\lambda\times\vec{V}]$$

скалярно на $\vec{V}$ и учитывая, что второе слагаемое справа перпендикулярно к вектору $\vec{V}$, убедимся, что условием существования ортогональных к линиям тока поверхностей будет

$$\vec{V}\,\mathrm{rot}\,\vec{V} = 0.$$

Таково ограничение, накладываемое на поле скоростей, без выполнения которого невозможно существование поперечных сечений трубок тока, нормальных к линиям тока. В случае одной линии тока это равенство будет справедливо всегда, а значит скорость $\vec{V}$, которая всегда является касательной, к линии тока будет всегда перпендикулярна rot $\vec{V}$.

Второй способ. Известно, что rot любой векторной величины можно представить в виде предела от интеграла [3]

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \lim \frac{1}{v}\int_{\sigma} [\vec{n} \times \vec{V}]\,d\sigma\,,$$

где v и σ - объем и поверхность его ограничивающая; $\vec{n}$ - орт внешней нормали к поверхности.

Если подынтегральную функцию представить как некоторую постоянную среднюю функцию, дающую в результате интегрирования такое же значение как и сама функция, то её среднее значение можно вынести за знак интеграла и независимо от того, какие локальные параметры ($\vec{n} \times \vec{V}$ или синус угла между ними) изменились, плоскость, которую они образуют, будет всегда перпендикулярна величине rot$\vec{V}$. Таким образом, величина rot$\vec{V}$ всегда перпендикулярна скорости $\vec{V}$.

Доказанные положения говорят также о том, что rot rot $\vec{V}$ всегда будет коллинеарен $\vec{V}$.

Таким образом, доказано перпендикулярное взаиморасположение вектора и его ротора. Тогда третий вектор, который является векторным произведением ротора скорости и скорости будет направлен по перпендикуляру в плоскости, в которой эти оба вектора находятся. Четвертый вектор - вектор кручения - всегда будет отслеживать направление абсолютной скорости.

В итоге после суммирования составляющих вектора Навье-Стокса путем построения пространственного четырехугольника можно определить результирующий вектор, который, как видим, получается равным нулю. Ну и что? Это было ясно с самого начала из вида векторного уравнения. Какой смысл в этом векторе-фантоме? Какое новое качество он вносит в понимание процессов турбулентных течений? Ответить на эти вопросы попробуем применив к этому вектору векторную операцию ротор, по аналогии с тем, как это делал Гельмгольц, доказывая свою замечательную теорему о сохранении вихревых линий. Тогда rotВНС = 0. После раскрытия слагаемых этого вектора [3] получим уравнение дисперсии (распространения) завихрённости вязкой жидкости

$$\frac{d\,\mathrm{rot}\,\vec{V}}{d\tau} - \mathrm{rot}\,\vec{V} \cdot \mathrm{grad}\,\vec{V} - \nu\,\mathrm{rot\,rot\,rot}\,\vec{V} = 0.$$

Вот и ответ: вектор Навье-Стокса преобразовался в другую форму - дисперсионный турбулентный вектор, где явно в качестве переменных присутствуют только члены, характеризующие турбулентное течение. Конечно, это уравнение не из простых, но видимо оно даст возможность предсказать линии тока самых замысловатых течений, наблюдаемых в повседневной жизни, примеры которые приведены на фотографиях в конце данной статьи. Д

Литература

1. Ю.М. Кочетков. Турбулентность - не хаос, а тонкоорганизованная структура // Двигатель № 6, 2004 г.

2. В.Н. Жигулев. Современное состояние проблемы устойчивости ламинарных течений. Механика турбулентных потоков // Наука, М., 1980 г.

3. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа // Дрофа, М., 2005 г.

4. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Торсионно-волновая парадигма // Двигатель № 4, 2011 г.

5. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Вязкость и сжимаемость // Двигатель № 5, 2011 г.

6. Ю.М. Кочетков. Турбулентность и автоколебательный процесс // Двигатель № 3, 2012 г.

7. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Фундаментальные уравнения сверхзвуковой газовой динамики и новый метод профилирования сопел ЖРД // Двигатель № 3, 2013 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com