УДК 532.2

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ.

ВОЛНЫ ТОЛМИНА - ШЛИХТИНГА

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.
Николай Юрьевич Кочетков, к.т.н.

Изложена физика возникновения волн Толмина–Шлихтинга, основанная на возбуждении собственных колебаний подвижной среды. Показаны преимущества метода малых возмущений при исследовании неустойчивых режимов ламинарных потоков. Получены новые решения уравнения Орра–Зоммерфельда для амплитудных функций и уравнения Прандтля–Глауэрта для линии тока волнового течения Толмина–Шлихтинга.

The physics of Tollmien – Schlichting waves initiation, based on the excitation of natural oscillations of the fluid is stated. The advantages of the small-perturbation method in the study of unstable laminar flow regime are shown. New solutions of Orr – Sommerfeld equation for the amplitude functions and Prandtl – Glauert equation for wave flow streamlines of Tollmien – Schlichting are obtained.

Ключевые слова: ***турбулентность, сопло, вихрь.***
Keywords: ***turbulence, nozzle, curl.***

Под турбулентностью можно понимать любые трехмерные течения, у которых скорости в разных направлениях либо одинаковы, либо близки, либо одного порядка. Если существует какое-то одно доминирующее направление в течении, скорость у которого намного больше скоростей в других направлениях, такое течение уже можно считать не турбулентным. Так, например, гиперзвуковые потоки имеют лишь одно направление (прямолинейное, радиальное и т.д.). Присутствие доминирующих потоков исключает молярное перемешивание и оставляет только молекулярное взаимодействие между линиями тока. Поэтому любые виды возможных движений, кроме поступательного, можно считать турбулентными видами. Это - вращение, кручение, винтовое и прочие комбинации этих элементарных движений. Особым видом турбулентного движения является волновое движение. Все перечисленные виды турбулентного движения способствуют перемешиванию или перепутыванию соседних линий тока и превращению потока в сильно отличающийся от послойного. Но! При определенных, уже известных науке условиях эти потоки могут распутаться и вернуться в упорядоченное состояние. Так, например, этому сильно способствует расширение потока и его плавность из-за сглаживания стенок, которыми он ограничен. Если теперь специально выделить из всех видов движения, как особый вид, волновое движение, то останутся всего два элементарных вида - вращение и кручение. Ну, конечно, и их устойчивые комбинации. Экспериментально уже установлено [1], что между называемой ламинарностью, когда скорость каждой частицы определяется поступательным и тепловым движением, и турбулентностью с вихрями и жгутами, существует переходная область. Уточним, что эта переходная область и есть волновое движение. Два известных немецких ученых Вальтер Толмин и Герман Шлихтинг открыли это течение. Изучая в пограничном слое процессы перехода ламинарного потока в турбулентный, они, дополняя друг друга, аналитически определили условия устойчивости каждого из них, сосредоточившись непосредственно на переходной области. Их работы явились началом практического изучения структуры течения потока и дали возможность, наряду с пульсационным подходом, посмотреть на турбулентность как на высокоупорядоченную и высокодифференцированную структуру. Появилась возможность рассматривать турбулентность не как случайный гидродинамический сценарий, а как весьма детерминированный процесс.

Линейная задача теории устойчивости

В основу исследований устойчивости ламинарного течения положен основополагающий в теории колебаний факт о том, что, если на систему воздействовать любыми сколь угодно малыми возмущениями, толчками, вибрациями и т.п., то система на них отреагирует. Если амплитуда этих возмущений будет возрастать, и реакция системы не сработает, что приведет к её раскачиванию относительно условного положения равновесия, то эта система считается неустойчивой. Если малые возмущения не способны вывести систему из равновесия и перевести её в колебательное состояние, то система устойчива. При анализе устойчивости следует четко понимать, что любое рабочее тело: жидкость, газ или плазма, ограниченные поверхностью или заключенные в данный момент в некоторую конструкцию (бак, камеру и др.), будут характеризоваться своей уникальной индивидуальной степенью реакции на воздействие внешних возмущений, а именно, собственной частотой. Другими словами, если систему вывести из равновесия, то первая, самая начальная реакция на возмущение будет возвратная сила, приводящая к колебаниям, и система будет колебаться именно с этой частотой. Дальнейшие, более жесткие внешние условия могут привести систему и в другое, не обязательно колебательное состояние. Поэтому именно малые возмущения способны спровоцировать упругие ответные реакции, по поведению которых можно определить самое начало перехода в другое устойчивое, колебательное состояние. Математически такой прием воспроизведения малых возмущений реализуется учетом лишь первого члена разложения решения уравнений движения. Другие члены с высокими производными игнорируются. При этом считается, что задача о неустойчивости ламинарного течения, решается в линейном приближении. Так, в линейном приближении было получено знаменитое уравнение Орра-Зоммерфельда [2]

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha \cdot \mathrm{Re}}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi).$$

Это уравнение было выведено из уравнений Навье-Стокса и записано для амплитуды $\varphi(y)$ функции тока:

$$\psi = \varphi \cdot e^{i\alpha(x - ct)}.$$

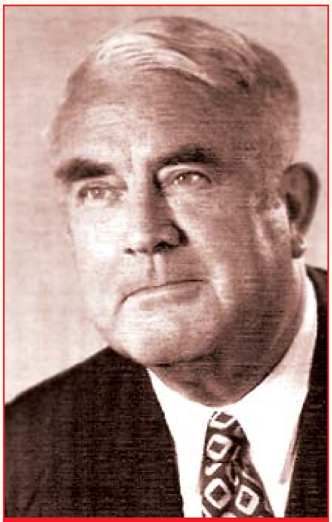
причем функция тока была записана в самом общем виде. Здесь α - обратная величина от длины волны возмущения; U - скорость потока; c - фазовая скорость возмущения.

Исследование устойчивости ламинарного течения представляет собой не что иное, как задачу на собственные значения этого дифференциального уравнения, то есть поиска собственной функции $\varphi(y)$.

Первым в невязкой постановке ($\mathrm{Re} \to \infty$) это уравнение попытался решить лорд Релей. Ему, после серьезного анализа удалось сформулировать две важные теоремы: о влиянии на устойчивость точки перегиба в профиле скорости у стенки и об ограничении фазовой скорости.

Решением полного уравнения Орра-Зоммерфельда впервые озаботился Вальтер Толмин. Прежде всего, В. Толмин произвел точное доказательство теорем Релея. Далее Толмин разработал метод определения условий возникновения неустойчивости ламинарного потока. Шлихтинг, взяв за основу метод Толмина, провел обширные расчеты применительно к пограничному слою на плоской пластине. Работы этих ученых были, в основном, направлены на определение границ, при которых наступает неустойчивость. Они искали теоретически (Толмин) и расчетным путем (Шлихтинг)

Вальтер Толмин



Герман Шлихтинг

те значения чисел Рейнольдса, при которых наступает режим турбулентного течения. Ими были получены великолепные петлеобразные зависимости, характеризующие области ламинарных течений и, как им казалось, турбулентных. Почему казалось? Да потому, что эти области были не турбулентными. Они были лишь переходными. Это были области волновых течений. Поэтому ни разу не удалось получить критические числа Рейнольдса, равные или близкие к экспериментальным значениям. Полученные ими значения всегда были ниже экспериментальных. Турбулентность находилась намного правее по оси в направлении возрастания чисел Рейнольдса. Шлихтинг так объясняет это несовпадение: *"При расчете на устойчивость всегда следует ожидать, что точка, в которой ламинарный пограничный слой становится неустойчивым (нейтральная точка на петлеобразной кривой), будет лежать выше по течению перехода ламинарной формы в турбулентную, так как турбулентность, возникающая вследствие нарастания возмущений, развивается именно на пути от нейтральной точки к точке перехода"*. Такое объяснение, к сожалению, следует считать устаревшим. Ведь Толмин и Шлихтинг так и не дошли до турбулентности. Они исследовали пограничный слой в линейной постановке, а значит, были ограничены лишь колебательными (волновыми) процессами. Поэтому можно объяснить и то, что они именно в этом направлении сделали свое замечательное открытие, носящее их имя. Это - волны Толмина-Шлихтинга. Шлихтинг позднее специально получил эти волны, демонстрируя возможность метода малых колебаний. Он вычислил собственную функцию и построил линии тока для случая обтекания плоской пластины (рис. 1).

Итак, основным предметом исследований Толмина и Шлихтинга были собственные значения - величины амплитудной функции $\varphi(y)$. Попробуем решить уравнение Орра-Зоммерфельда другим способом. Подобно лорду Релею упростим уравнение. Но в отличие от него сосредоточимся на правой части уравнения. Изначально будем считать, что полное уравнение, без упрощений, справедливо всегда. Тогда, если мы его упрощаем, например, показывая, что правая часть мала и практически равна нулю, то остается левая часть, и она равна нулю. Вспомним академика С.С. Кутателадзе, который придумал метод исчезающей вязкости. Он сказал, что если число Рейнольдса стремится к бесконечности, то это все равно, что вязкость стремится к нулю. Тогда можно превратить уравнение Навье-Стокса в уравнение Эйлера, исключив при этом члены с вязкостью. Сделаем то же самое. Поскольку в правой части уравнения Орра-Зоммерфельда число Рейнольдса считается большим, подобно Кутателадзе будем считать исчезающе малым трехчлен, содержащий четвертую производную. А что? Ведь левая часть при этом не пострадает и выводы лорда Релея не будут дезавуированы. Теперь будем решать уравнение четвертой степени относительно амплитудной функции. Поскольку оно линейное, найдем его характеристическое уравнение

$$(p^2 - \alpha^2)^2 = 0.$$

Видно, что это уравнение имеет четыре попарно кратных корня: два $p_1 = p_2 = \alpha$ и два $p_3 = p_4 = -\alpha$. Учитывая это, запишем полное решение для амплитудной функции

$$\varphi(y) = c_1 e^{\alpha y} + c_2 y e^{\alpha y} + c_3 e^{-\alpha y} + c_4 y e^{-\alpha y}.$$

Используя граничные условия, аналогичные Толмину и Шлихтингу [2], можно определить функцию тока для поставленной задачи.

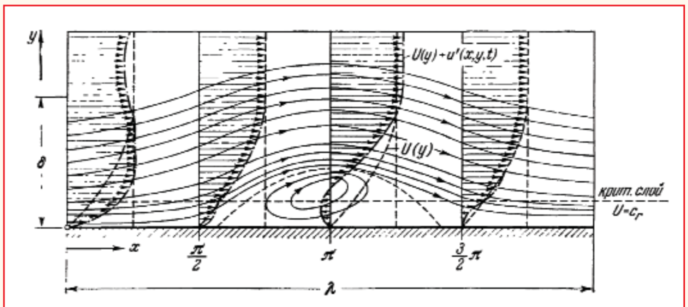


Рис. 1 Линии тока по расчету Шлихтинга

Определение линии тока

Подобно [3, 4], решим задачу определения линии тока при установившемся течении Толмина-Шлихтинга для плоского случая. Воспользуемся уравнением Прандтля-Глауэрта. Отметим сразу, что уравнение Прандтля-Глауэрта было получено после преобразований уравнения неразрывности. Оно не содержит вязкостных членов и может быть использовано для любых видов течения, как дозвукового, так и сверхзвукового. Это уравнение "является основным в теории течений газа с малыми возмущениями скорости"[5]

$$(1 - M)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0\,.$$

Сформулируем граничные условия для случая Толмина-Шлихтинга, учитывая ламинарный профиль скорости у стенки

$$V = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = U\frac{\partial Y}{\partial x} \quad \text{при } y = \delta_{пс};$$

$\varphi = U y$ - условие сдвигового течения.

Решение будем искать методом разделения переменных: $\varphi = F(x)\,G(y)$. Тогда получим

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{(1 - M)G} = -\kappa^2.$$

Решением первого уравнения является колебательная функция $F = A\sin\kappa x + B\cos\kappa x$, второго

$$G = Ce^{-\sqrt{1-M^2}\kappa y} + De^{-\sqrt{1-M^2}\kappa y}$$ - апериодическая функция.

Для потенциала скоростей с учетом малых значений чисел Маха и краевых условий решение будет иметь вид

$$\varphi \approx U y \cos\kappa x.$$

Согласно первому граничному условию

$$\frac{dY}{dx} = \frac{1}{U}\cdot\frac{d\varphi}{dy} = \cos\kappa x\,.$$

При этом форма разделительной линии получится в виде

$$Y = (1/\kappa)\sin\kappa x + c.$$

Такое, достаточно грубое решение задачи, тем не менее, показывает колебательный характер линии тока при условиях близких к условиям достаточно медленных течений. Но решения предполагают не только медленные течения. Учет экспонент перед тригонометрическими частными решениями дает возможность получить более точные значения, зависящие в том числе от чисел Маха. При этом числа Рейнольдса, в принципе, могут быть достаточно высокими. Ограничением будет переход к турбулентному течению. Но эта другая задача и на сегодняшний день она не решена в достаточной степени. Ещё только предстоит найти закономерности, подобные закономерностям Толмина и Шлихтинга, которые будут справедливы не только для волновых течений в пограничном слое. Ещё также потребуется достаточно большое количество целенаправленных экспериментов, позволяющих корректно определить границу перехода от волнового течения к турбулентному.

Экспериментальные факты

Итак, волны Толмина-Шлихтинга могут возникать при условии сдвиговых потоков. При этом сдвиг может быть как в течениях со скачкообразным разрывом потока [4], так и в течениях с градиентом скорости, но без разрыва. Последний случай имеет место при потере устойчивости ламинарного пограничного слоя. Действительно, резкий ламинарный профиль скорости у стенки создает в соответствии с законом Бернулли в поперечном направлении профиль давления, градиент которого направлен перпендикулярно линиям тока. Под действием этого градиента линии тока искривляются и могут приобретать волнообразный вид. Причем повышение давления наблюдается с вогнутой стороны. Этот факт был отмечен Людвигом Прандтлем и он часто является объяснением причины появления волновых течений.

Теория, основанная на предположении малых колебаний (возмущений) Толмина и Шлихтинга приводит к заключению о том, что эти волны, возникшие при определенных числах Рейнольдса, а именно при таких числах, которые соответствуют уровню собственных частот колебаний системы, содержащей в своем объеме упругий газ или жидкость, могут усиливаться под воздействием внешних колебаний. Другие колебания, которые не совпадают с собственными, будут затухать. В любом случае с помощью малых возмущений можно отметить три основных фактора, которые характеризуют ламинарное течение в области, где оно теряет устойчивость.

Первый фактор базируется на том, что при любом малом воздействии на ламинарный поток возникает реакция в системе, в данном случае в текущей среде, в виде её колебаний с собственной частотой.

Второй фактор основан на том, что если система под действием этих малых возмущений "раскачается", потеряет устойчивость, то уже можно говорить о приближении турбулентности.

Третий фактор подразумевает резкое упрощение дифференциальных уравнений Навье-Стокса. При этом они становятся линейными.

Открытые Толмином и Шлихтингом волны в тот период времени ещё не были подтверждены экспериментально. Существовали только весьма скромные расчетно-теоретические доказательства их присутствия в переходных процессах. В настоящее время также существуют весьма ограниченные, практически единичные, экспериментальные подтверждения таких течений. Но тем они ценнее и значительнее. Так, например, на рис. 2, 3 и 4 представлены последовательно фотографии, где изображены волны Толмина-Шлихтинга, полученные разными методами при различных условиях течения: во внутреннем течении в сопле, при внешнем обтекании и в струе. Интересным является то, что эта область волнового течения практически совпадает с переходной областью на кривой, полученной И.И. Никурадзе для гладких труб (рис. 5, область II) и с результатами опытов А.А. Павельева, полученных для спутных струй [4].

Рис. 2 Фото волн Толмина-Шлихтинга в трансзвуковой части сверхзвукового конического сопла

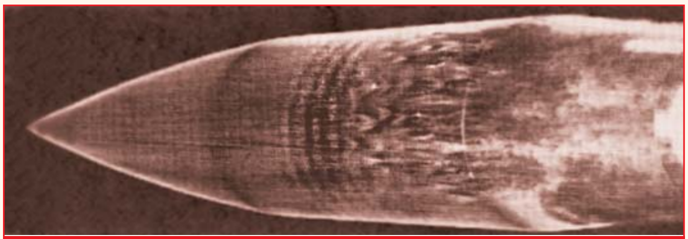


Рис. 3 Волны Толмина-Шлихтинга на поверхности снаряда (Мюллер, Нельсон, Кегельман, Морковин)

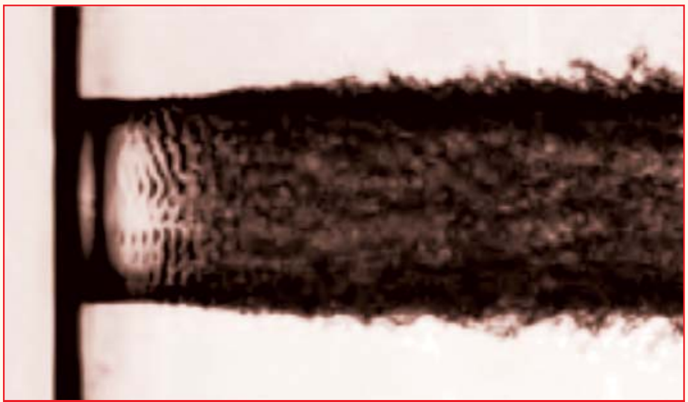


Рис. 4 Волны Толмина-Шлихтинга на поверхности струи воды (Хойт, Тейлор)

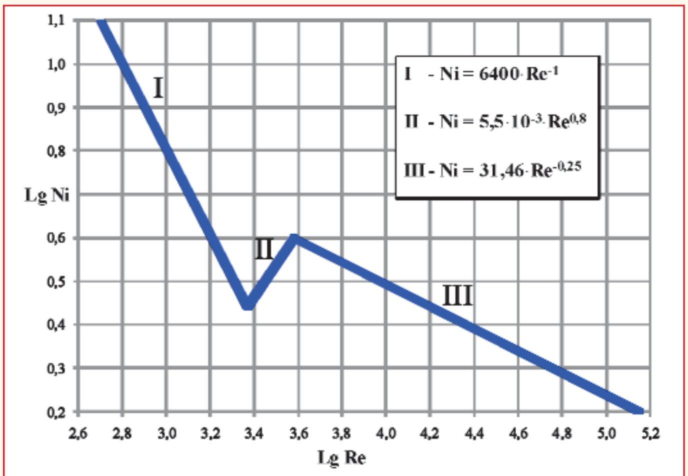


Рис. 5 Зависимость числа Никурадзе от числа Рейнольдса для гладких труб

Литература

1. Ю.М. Кочетков. Турбулентность без градиентов. // Двигатель № 5, 2006 г.
2. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М. Наука, 1974 г.
3. J. Ackeret. Gasdynamic, Handbuch der Physik, Bd. 7. Kap. 5, Berlin, 1927.
4. Ю.М. Кочетков, Н.Ю. Кочетков. Турбулентность в РДТТ. Разделительные линии. // Двигатель № 4, 2010 г.
5. Г.Г. Черный. Газовая динамика. М. Наука, 1988 г.

Волны Толмина-Шлихтинга в воздушном океане Земли