

МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА И ОБОБЩЕНИЕ КАРДИНАЛЬНОГО ЧИСЛА НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

МФПУ "Синергия":

Андрей Иванович Касьян, доцент

Согласно классическому определению, два эквивалентных множества имеют одинаковую мощность, т.е. мощность - это то общее, что есть у них. Мощность множества M характеризует кардинальное число $\text{card } M$. Для конечных множеств понятие мощности совпадает с понятием числа их элементов (и кардинальное число равно числу элементов) [1]. Кардиналы, как и мощности, можно сравнивать. Докажем утверждение, что множество натуральных чисел может оказаться несчетным, т.е. его кардинальное число может быть больше "алеф нуль" ("алеф нуль" определяется как мощность множества $\mathbb{N}$). Предварительно выскажем предположение, что мощность множества (число его элементов и кардинал) не зависит от того, в каком порядке расположены или рассматриваются (нумеруются) его элементы. Такое предположение вполне естественно и делается неявно в классической диагональной процедуре Кантора. В противоположном случае мы должны были бы строго устанавливать эквивалентность множеств при всевозможных порядках расположения их элементов, с учетом, например, того, что число различных "порядков" для множества натуральных чисел несчетно.

Итак, расположим множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в столбик произвольным способом наподобие того, как это сделано в диагональной процедуре Кантора:

$$\alpha_1 = a_{11} \ a_{12} \dots \ a_{1n} \dots$$

$$\alpha_2 = a_{21} \ a_{22} \dots \ a_{2n} \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_n = a_{n1} \ a_{n2} \dots \ a_{nn} \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

Здесь a_{ik} - k -я цифра числа α_i . Замечание. Для удобства мы можем записывать числа в обратном порядке, когда счет разрядов идет слева или даже записать числа в римских цифрах, что не принципиально. Наконец, мы можем расположить числа натурального ряда в некотором порядке. Например, расположить вначале все нечетные, а за ними четные числа и т.д.

Построим новое натуральное число

$$\beta = b_1 \ b_2 \dots \ b_n \dots$$

а именно: за b_1 примем произвольную цифру, не совпадающую с a_{11} , за b_2 - произвольную цифру, не совпадающую с a_{22} , и т.д. Полученное число не может совпасть ни с одним из чисел нашего исходного перечня. Следовательно, множество натуральных чисел несчетно, т.е. его кардинал не равен, а точнее, больше "алеф нуль".

Т.к. за счетное множество выбирается именно множество натуральных чисел, то приведенная выше процедура приводит к мысли о том, что мощность множества может иметь не одну, а две (возможно несколько) "составляющие", наподобие комплексного числа. (Вообще, мощность - это класс эквивалентности. Возникает подозрение, что существует какая-то зависимость от порядка, или же порядкового типа. Более того, в каком-то смысле существует соответствие между натуральным рядом и континуумом. Имеется в виду, что переставляя числа в натуральном ряде, мы получим несчетное число комбинаций). В этом случае кардинал множества натуральных чисел (в произвольном порядке) может быть записан как упорядоченная пара: первое число - "алеф нуль", что соответствует его фактическому определению кардинала натурального ряда, а второе - "алеф не нуль", что соответствует результату доказанного выше утверждения при соответствующих предположениях (варианты обозначения: "алеф (0, 1)", "алеф01"). Представляет интерес дальнейшее обобщение нашего кардинала (т.е. возникновение новых составляющих, возможно промежуточной мощности). Можно предположить, что для произвольного порядка получаем как раз промежуточную мощность. Что можно задать аксиоматически. Имеется в

виду, что получаем кардинал, больший "алеф нуль". Правда, в этом случае мощность, скорее всего, зависит от порядка, нанося логический ущерб исходному доказательству. В итоге аксиоматически можно ввести такое определение: кардинал множества натуральных чисел в естественном порядке равен "алеф (0, 0)". Это требует дополнительного исследования.

В связи с доказанным утверждением возникает множество интересных вопросов. Если вопросов к сходимости и предельным точкам нет, то сможем ли исчерпать элемент бесконечномерного пространства конечномерным приближением? В теоремах И. Виноградова о простых числах, в алгоритме Эратосфена и др. используется натуральный ряд в его естественном порядке, что не сказывается на результатах, т.к. $\text{card} = \text{"алеф (0, 0)"}.$ В методе математической индукции также подразумевается натуральный ряд в естественном порядке. В теореме Кантора-Бернштейна мощность вообще не используется. Но, допустим, в теореме о том, что мощность множества всех подмножеств натурального ряда равна мощности континуума, рассматривается мощность множества подмножеств в классе тех, у которых дополнение конечно, и она считается счетной. Подмножества с нулевым дополнением рассматриваются в произвольном порядке, т.е. мощность должна быть тогда равна "алеф (0, 1)". Предположим, что этот класс не влияет на (суммарную) мощность множества всех подмножеств. Однако мощность остальных подмножеств (с бесконечным дополнением) весьма вероятно также равна "алеф (0, 1)". Сможем ли мы тогда "перечислить" все эти подмножества и т.д.

Далее, если процедуру вычислений отождествить с некоторой программой, то она будет представлять из себя запись алгоритма на некотором языке некоторого алфавита. Такая запись позволяет "перенумеровать" все вычисляемые функции, например, по следующему порядку. Сначала перечисляются все программы, состоящие из одной буквы, затем программы, включающие две буквы и т.д. Здесь присутствует в некотором смысле произвольный порядок перечисления. В итоге "перечислить" и пронумеровать все вычисляемые функции нам может помешать мощность, большая счетной.

Далее, можно обратиться к проблеме перечислимости некоторого множества X самого по себе (его можно рассматривать как область значений вычислимой функции). Здесь аналогично можем встретить затруднения по вычислению соответствующих значений, т.к. это множество значений может иметь мощность, большую счетной. Итак, множество из области значений вычислимой функции, как и сами вычисляемые функции в общем случае не представляется возможным перечислить. Т.е. перечислить или перенумеровать их можно, но не будет уверенности, что перечислены все. Для вычисляемых функций также справедлив диагональный метод. Отказаться от диагональных рассуждений нельзя, т.к. они часто используются. Для "перечисленных" вычисляемых функций $f_n(n)$ вводится функция $v(n) = f_n(n) + 1$, которая не равна ни одной из них. В итоге мы оказываемся не в состоянии определить функцию $v(n)$, описывающую все вычисляемые. (Правда, $v(n)$ трактуют как невычислимую, что можно объяснить "перечислением" несчетного множества). Предлагается, в свою очередь, определить вычислимую функцию, как обычную функцию, определенную для натурального числа n , когда натуральный ряд расположен в естественном порядке $n = 1, 2, \dots$ Другими словами, можно договориться писать $f(n)$, не оговаривая её определенность при n , например $f(n) = n$.

Если множество имеет мощность, большую счетной, то (алгоритмом или программой) определять принадлежность всех его элементов тому, или иному подмножеству невозможно. В этом случае

теорема Поста требует уточнения. Аналогично теорема Матиясевича. Примеры можно продолжить и далее.

Обратимся к теореме Гёделя. Казалось бы, простейшие арифметические и логические операции не должны приводить ни к каким затруднениям. Но, даже при бесконечном множестве аксиом нельзя достичь аксиоматизации теории. Не влияет ли на это положение

вещей рассмотренный выше пример несчетности? (Порядок множества чисел не предполагается).

Литература

И. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Наука, 1981 г.

Связь с автором: akasyan1@yandex.ru

МЕЖДУНАРОДНАЯ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННАЯ ВЫСТАВКА

СТАНКОСТРОЕНИЕ



15 - 18 октября 2013

МВЦ Крокус Экспо

При поддержке:

Торгово-промышленной Палаты Российской Федерации
Московской торгово-промышленной Палаты



Оборудование от ведущих компаний!

металлообрабатывающие станки
инструмент
автоматические линии
робототехника
комплектующие изделия
литейное производство
сварочное оборудование
обработка листового металла
лазерные технологии
измерительные приборы
программное обеспечение
деревообрабатывающее оборудование

Организатор выставки: ООО «Райт Солюшн»

+7 (495) 988-27-68

www.stankoexpo.com

СТАНОЧНЫЙ ПАРК