

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. МОДЫ ФУРЬЕ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Неустойчивость является частным случаем теории турбулентности. Все основные положения неустойчивости работы двигателей на химическом топливе базируются на уравнениях для турбулентных течений. Одним из интереснейших разделов теории неустойчивости является гармонический анализ, основанный на учении о тригонометрических рядах Фурье. Отмечается, что первый член ряда Фурье является основным тоном (модой) и определяет высоту звука. Последующие члены ряда Фурье представляют собой обертоны, а их сочетание определяет тембр звука. На базе торсионно-волновой парадигмы возможно проведение гармонического анализа в ЖРД.

В предыдущей работе [1] было показано, что некоторые турбулентные образования, такие как вихри, торсионные жгуты и винтовые течения могут приводить к появлению пространственной периодичности. А например, вихрь, установившийся в донной области, может быть описан цилиндрической функцией. При этом близлежащие слои жидкости или газа благодаря силам трения будут воспринимать со стороны вихря пульсационные воздействия. В определенных случаях в этих областях возникает местный колебательный процесс. Представим себе мысленно следующий эксперимент. Твердый вращающийся диск почти касается вертикально установленной сверху от него трубки. В трубке свободно движется шарик, периодически соприкасаясь с диском. Понятно, что при вращении диска шарик будет совершать колебательные движения, так как под действием вращения он будет отскакивать от диска, а под действием гравитационной силы к нему постоянно стремиться. Частота колебаний шарика будет зависеть от угловой скорости вращения диска, и чем она больше, тем частота будет меньше. Данный мысленный опыт иллюстрирует естественный переход вращательной энергии диска в колебательную энергию шарика. Очевидно, что данный процесс является автоколебательным, так как со стороны диска происходит постоянная подпитка энергией. В двигателях, работающих на химическом принципе (ЖРД, РДТТ, ГРД и др.) при определенных условиях также возникает колебательный процесс. Он сопровождается возникновением неустойчивости в работе. Понятно, что процесс без колебаний всегда будет устойчив и тогда не возникает проблем по части прочности. Но, если бы двигатель мог работать, не разрушаясь из-за недостаточной прочности, то тогда можно было бы вполне резонно говорить о том, что процесс в камере сгорания устойчив. Видимо в перспективе, когда конструкции будут достаточно прочными, произойдет переход к условиям, когда газодинамический процесс и процесс горения будут колебательными. Ведь понятно, что при таком колеблющемся потоке перемешивание продуктов сгорания будет весьма эффективным. Такой способ позволит решить проблему гиперзвукового горения, так как скорость поперечных колебаний, зависящая от частоты, будет соизмерима со скоростью компонентов в продольном направлении. На практике уже рассматривалось вибрационное горение [2], предполагающее малые амплитуды. Но вполне возможны и значительные амплитуды при сохранении сверхвысоких частот.

В работе [1] также было показано, что автоколебательный процесс является акустическим солитоном, то есть дисперсия, возникающая в данном процессе, компенсируется нелинейностью этого процесса. Это уникальное свойство характерно и для процессов турбулентности и для процессов неустойчивости. Схожесть их говорит об одной природе возникновения. Не случайным является тот факт, что уравнения, полученные без учета сопротивления, по внешнему виду совпадают с уравнениями полученными строго для автоколебательного процесса. Вспомним, что уравнение для автоколебательного процесса имеет вид уравнения для

линейного осциллятора. Проследим за цепочкой действий, полученных не точно, но позволивших получить похожее уравнение, полученное точно. Берем любую книгу по акустике. Первое, что мы видим - это игнорирование уравнения Навье-Стокса. Почти всегда трение не учитывается, а используется уравнение Эйлера. Второе: почти во всех известных случаях рассматривается двумерная задача. При этом делается ссылка на то, что практически все конструкции осесимметричны. Третье допущение состоит в том, что выбрасываются из рассмотрения нелинейные члены. При этом, как известно, теряются весьма важные решения (сглаживаются пики давления, могут теряться экстремумы и т. д.). Четвертое допущение предполагает малость изменения активных параметров. Выбрасываются все члены из разложения ряда выше первого. Пятое допущение гласит о том, что выбрасываются из рассмотрения малые, относительно больших, члены уравнения.

После всех процедур "издевательства" над уравнением Навье-Стокса получают очень изящное классическое волновое уравнение. Исследователи успокаивают себя: "Ведь было классическое уравнение Навье-Стокса, а стало не менее классическое волновое уравнение математической физики". Более того появилась надежда его решить методом разделения переменных Фурье, а главное, появилась ясная гарантия того, что решения уравнения будут иметь колебательный вид. И действительно, если применить метод Фурье, для уравнения записанного в цилиндрических координатах, то оно распадается на два: Бесселя и Неймана. Уравнение Бесселя немедленно начали решать и получили разложение в ряд по "бесселям", а вот с уравнением Неймана возникли трудности и его решали численно. Решение уравнения Бесселя считается точным решением в задаче о неустойчивости, при этом первый член разложения называют главной модой колебания. Последующие члены характеризуют обертоны. Если задуматься над данным утверждением, то следует считать, что первый член ряда Бесселя (константа игнорируется) совпадает с первым членом ряда Фурье, полученном при точном решении уравнения Навье-Стокса. Справедливо ли это?

В практике обычно предполагают, что решения волнового уравнения будут колебательными. Это дает основание его упростить и перейти к уравнению Гельмгольца, но тогда при одномерном случае оно (уравнение Гельмгольца) превращается в тривиальное уравнение для осциллятора без сил трения. Чего и требовалось ожидать. Но!.. Такое же уравнение было получено после точного решения уравнения Навье-Стокса. Правда, в отличие от рассмотренного ранее в последней работе [1] рассматриваются колебания в каждой точке заданного пространства камеры сгорания, например ЖРД. А именно, в каждой точке заданного пространства можно описать автоколебательный процесс если он при этом имеет место.

Таким образом, автоколебательный процесс - это чистая гармоника. Но известно из практики ЖРД, что чистых гармоник в камере обычно не получается. Получается сложная суперпозиция обертонов, придающих уникальный тембр звучанию.

Жан Батист Жозеф Фурье. Выдающиеся открытия



Жан Батист Жозеф Фурье, знаменитый французский математик и физик, родился 21 марта 1768 г. Основным его сочинением был трактат под названием "Аналитическая теория тепла", ставший вехой в математической физике, где он развил математическую теорию теплопроводности. Лорд Кельвин назвал эту теорию великой математической поэмой. Фурье развил методы решения уравнения теплопроводности при различных граничных условиях, тем самым заложив основы математической физики. Его метод разделения переменных является универсальным инструментом при решении многих задач математической физики. Но поистине уникальное открытие им было сделано после того, как он разработал учение о представлении функций в виде тригонометрических рядов, которое ему потребовалось для решения своих уравнений. Его работы в этом направлении привели к новому взгляду на понятие функции. Появились понятия функции действительного переменного и функции комплексного переменного. В дальнейшем это учение было развито великими математиками Вейерштрассом, Дирихле и др. Представленная теория Фурье, изложенная в "Аналитической теории тепла" поначалу была подвергнута критике со стороны известных математиков: Эйлера, Даламбера, Бернулли и Лагранжа. Ранее теория тепла строилась на подходах Лапласа, основанных на механическом детерминизме и использовала ньютоновскую механику. Но вскоре основоположники данного учения были вынуждены принять новую теорию Фурье как исходную точку науки нового типа [3]. Вторым предметом притязаний, перечисленных ученых было то, что Фурье не удалось при жизни доказать сходимость его рядов, но это позже изящно сделал Дирихле.

Гармонический анализ неустойчивости ЖРД

Разработанная теория Фурье по представлению функций в виде тригонометрических рядов позволила проводить так называемый гармонический анализ процесса неустойчивости ЖРД. Другими словами, гармоническим анализом называется процедура разложения искомой функции в ряд Фурье. Для чего же это надо делать и какую пользу приносит подобное разложение? Все очень просто - члены бесконечного ряда Фурье являются обертонами. То есть, разлагая любую функцию в такой ряд, получаем сумму бесконечного количества оттенков звучания. Каждый член ряда - это мода, или тон, или нота. Каждой моде соответствует определенная частота. Первый член ряда, не считая свободного члена, называется основным тоном и определяет высоту звучания

сложного звука. Последующие члены (обертоны) определяют окраску звука (тембр). Амплитуда обертона уменьшается с увеличением его порядка.

Математически ряд Фурье записывается следующим образом

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

Искомую функцию $f(x)$ можно представить путём группирования членов и ввода понятия местной амплитуды A_k и фазы колебательного процесса φ_k

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx + \varphi_k).$$

Вводя далее понятие периода $T = 2\pi/\omega$ верхнюю формулу можно переписать:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Последняя запись характеризует представление произвольных гармонических колебаний с кратными частотами. При этом первый член под суммой, имеющий вид $A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, определяет высоту звука или основной тон (моду). Важно то, что все периоды слагаемых соизмеримы между собой, то есть их отношения равны рациональным числам. В случае несоизмеримости периодов речь может идти только о шуме, то есть о сочетании слагаемых как о беспорядочно меняющихся сложных тонах. В отличие от звука, акустический спектр шума будет сплошным.

Интегралы коэффициентов тригонометрического ряда определяются либо аналитически с использованием положений торсионно-волновой парадигмы [4], либо численно по осциллограмме запуска ЖРД. **▲**

Литература

1. Ю.М. Кочетков. Турбулентность и автоколебательный процесс в ЖРД. // Двигатель № 3, 2012 г.
2. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. М. Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
3. Р.З. Кавтарадзе. Локальный теплообмен в поршневых двигателях. М.: изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001 г.
4. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Торсионно-волновая парадигма. // Двигатель № 4, 2011 г.

ИНФОРМАЦИЯ

Оборонное научное агентство DARPA решило ускорить разработку гиперзвуковых летательных аппаратов в ходе программы ИН, которая призвана решить технические проблемы гиперзвукового полета. Пентагон твердо придерживается позиции: гиперзвуковые технологии способны обеспечить военное доминирование и необходимы для решения будущих национальных задач в сфере безопасности.

Первые полномасштабные испытания нового гиперзвукового самолета под названием X-plane (НХ) состоятся уже в 2016 г. Он будет запускаться ракетой-носителем и после выполнения задания опускаться на землю с помощью парашюта, что снизит технологические риски разработки и поз-

волит увеличить интенсивность тестирования перспективных гиперзвуковых систем оружия.

Американские военные рассчитывают, что гиперзвуковой полет на высоте 76 км и скорости 20 М позволит доставить полезную нагрузку в течение одного часа в любую точку планеты. При этом не придется использовать неядерные баллистические ракеты, пуск которых может спровоцировать ответный ядерный удар. Да и против гиперзвуковых средств нападения и разведки пока ещё нет надёжных систем ПВО.

В рамках программы ИН будут выполнены масштабные исследования гиперзвуковых технологий по пяти основным направлениям: системы теплозащиты; аэроди-

намика, наведение, навигация и управление, оборудование и двигатели.

На скорости 20 М самолет НХ нагреется до температуры более 2000 °С - это больше, чем в доменной печи, где плавят сталь. До сих пор проблемы с нагревом и последующим разрушением обшивки являются основной причиной неудачных испытаний гиперзвуковой ракеты Х-51 и гиперзвукового бомбардировщика НТВ-2.

Если программа ИН будет реализована, то американские военные получат оружие глобального удара с дальностью стрельбы свыше 37 тыс. км. Это позволит США со своей территории наносить удары по объектам в любой точке планеты. **▲**