

# ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И АФЧХ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.



Юрий Львович Беренс, физик-экспериментатор, специалист по проблемам неустойчивости в ЖРД

**Торсионно-волновая парадигма турбулентности базируется на феноменологическом векторном уравнении Навье-Стокса, которое в замкнутой форме описывает одновременно пространственный и временной аспекты течения подвижных сред. На основании этого уравнения возможно исследовать все виды элементарных движений: волнового, поступательного, вращательного и торсионного. Большое значение для практики ЖРД играет волновое движение, которое является основой теории нелинейной неустойчивости процессов. С помощью этого уравнения возможно определять основные рабочие характеристики и проектные параметры камеры сгорания и сопла. Наиболее важной характеристикой является амплитудно-фазово-частотная, которая уже на стадии проектирования нового перспективного двигателя может гарантировать его надежную работу.**



Ольга Михайловна Меньшикова, физик-теоретик, специалист по проблемам неустойчивости в ЖРД

В соответствии с [1] торсионно-волновая парадигма турбулентности может быть трактована как две взаимосвязанные науки. Это - наука о линиях тока (турбулентность в традиционном ее понимании) и наука о колебаниях подвижной среды (для ЖРД и прочих двигателей - наука о неустойчивости). В практической деятельности эти две науки необходимо рассматривать одновременно. Общим уравнением, лежащим в их теоретической базе, является феноменологическое уравнение Навье - Стокса. Анализ этого уравнения с безусловным сопоставлением его результатов с экспериментальными фактами есть гарантия познания истинных положений парадигмы и источник методических инструментов в практической деятельности. Далее будут рассмотрены некоторые преобразования данного уравнения с целью получения в дальнейшем рабочих соотношений, необходимых для определения амплитудно-фазово-частотных характеристик (АФЧХ) при анализе возможных аварийных ситуаций ЖРД в условиях реализации неустойчивых процессов при его работе.

### Векторные преобразования уравнения Навье-Стокса

В общем виде уравнение движения Навье-Стокса для сжимаемой текущей среды записывается как

$$\frac{d\bar{V}}{d\tau} + \text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\bar{V}^2}{2} - \frac{v}{3} \text{div } \bar{V}\right) + [\text{rot } \bar{V} \times \bar{V}] - v \Delta \bar{V} = 0.$$

Привлечем для преобразований уравнение неразрывности и применительно к камерам ЖРД получим

$$\text{div } \bar{V} = - \frac{dp}{\rho} \frac{v_k}{d\tau} = - \frac{dm}{\rho v_k d\tau} = - \frac{p F_{кр} k}{\rho \beta v_k k} = - \alpha^2 \frac{\pi_{кр} F_{кр}}{k V_{кр} v_k}.$$

Здесь  $p$  и  $\rho$  - статическое давление и плотность;  $v_k$  и  $F_{кр}$  - объем камеры и площадь критического сечения;  $\beta = \alpha_{кр} / \pi_{кр} k$  - расходный комплекс;  $\alpha^2 = k\rho/\rho$ ;

$\alpha_{кр}$ ,  $\pi_{кр}$  и  $k$  - скорость звука в критическом сечении, газодинамическая функция давления в критическом сечении и показатель адиабаты Пуассона.

Вводя понятие эффективной длины  $L_{эф,кр} = V_k / F_{кр}$  и учитывая, что в диапазоне  $k = 1,12...1,2$  величина  $k/\pi_{кр} \approx 2$ , окончательно запишем

$$\frac{v}{3} \text{div } \bar{V} = - \alpha^2 \frac{1}{3 \frac{k}{\pi_{кр}} \cdot \frac{V_{кр} L_{эф,кр}}{v}} \approx - \frac{\alpha^2}{6 Re_{эф,кр}}.$$

Тогда общая запись под градиентом будет выглядеть следующим образом

$$\alpha^2 \left( \frac{1}{k} + \frac{M^2}{2} + \frac{1}{6 Re_{эф,кр}} \right).$$

Численно сравнивая сумму двух первых членов этого соотношения с третьим можно показать, что последний намного меньше двух предыдущих и им можно пренебречь. Тогда

$$\text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\bar{V}^2}{2} + \frac{\alpha^2}{6 Re_{эф,кр}}\right) \approx \text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\bar{V}^2}{2}\right).$$

Анализ экспериментальных результатов натуральных двигателей различных размерностей, проведенный К.И. Светушкиным [2] показал, что изменение полного давления по длине камеры сгорания не превышает 1%. Это означает, что величина градиента в уравнении практически равна нулю, а уравнение для сжимаемой среды применительно к камерам ЖРД может быть записано в виде

$$\frac{d\bar{V}}{d\tau} + [\text{rot } \bar{V} \times \bar{V}] - v \Delta \bar{V} = 0.$$

Сделаем еще одно замечание. В предыдущей работе [1] была доказана теорема 1 об элементарных движениях текущей среды. Запись через общий градиент позволяет трактовать эту теорему как справедливую для сжимаемой жидкости, а наличие общего градиента не меняет его смысла элементарного поступательного движения. Все остальные члены, характеризующие элементарные движения остаются неизменными.

### Безразмерная форма уравнения автоколебательной системы

Главное газодинамическое уравнение автоколебательного звена [1] запишем в виде

$$\frac{d^2 p}{d\tau^2} + \frac{4}{R^2} \frac{dp}{d\tau} + \mu V \frac{d\Delta V}{d\tau} = 0.$$

Преобразуем третий член данного уравнения ( $k$  - показатель адиабаты,  $p$  - давление,  $M$  - число Маха)

$$\mu V \frac{d\Delta V}{d\tau} = v \frac{\rho}{\rho_{кр}} \cdot \kappa V \frac{d\Delta V}{d\tau} \rho = v \frac{\kappa M^2}{V} \frac{d\Delta V}{d\tau} \rho.$$

Для условий камеры сгорания ЖРД и в соответствии с теоремой 2 [1]

$$\Delta V = -\text{rot rot } V = 4\omega^2/V = 4\omega/R,$$

получим

$$\mu V \frac{d\Delta V}{d\tau} = -4v \frac{\kappa M^2}{V} \frac{d}{d\tau} \frac{\omega}{R} \rho.$$

После взятия производной от отношения  $\omega/R$  получим

$$\mu V \frac{d\Delta V}{d\tau} = 4v \frac{\kappa M^2}{R^2} \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\tau} \rho.$$

Далее главное уравнение колебательного звена приведем к безразмерному виду. Для этого функцию статического давления  $p$  поделим на полное давление в камере сгорания  $\rho_0$ , а время

представим в безразмерном виде, отнеся его к периоду колебательной функции

$$\pi = p/p_0 \text{ и } \bar{\tau} = \omega_0 \tau / 2\pi.$$

Здесь  $\omega_0$  - собственная частота системы, заменившая период,  $\pi = 3,14...$  Тогда уравнение принимает следующий вид

$$\frac{d^2\pi}{d\bar{\tau}^2} + \frac{8\pi v}{R^2\omega_0} \frac{d\pi}{d\bar{\tau}} + \frac{8\pi v}{R^2\omega_0} \cdot \kappa M^2 \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\bar{\tau}} \pi = 0.$$

Видно, что перед искомой функцией и её первой производной стоят безразмерные комплексы (критерии). Если для краткости их обозначить соответственно как

$$Be = v/R^2\omega_0 \text{ и}$$

$$Me = \kappa M^2 \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\bar{\tau}}.$$

то последнее уравнение превратится в следующее

$$\frac{d^2\pi}{d\bar{\tau}^2} + 8\pi Be \frac{d\pi}{d\bar{\tau}} + 8\pi Be \cdot Me \cdot \pi = 0.$$

Полученное уравнение для главного колебательного звена является уравнением Навье-Стокса, записанным применительно к колебательным процессам в автоколебательном контуре. Оно является универсальным и в самом общем виде может характеризовать различные колебания систем ЖРД (камеру, систему подачи и т.п.). С математической точки зрения его можно рассматривать как обобщающее уравнение многих специальных функций. Так, например, если критерии постоянны, то данное уравнение может быть отнесено к уравнению линейного осциллятора. Если критерии могут быть представлены через индексы функции Бесселя, то уравнение становится уравнением Бесселя и может быть использовано при описании процессов в конструкциях с осесимметричной конфигурацией. В случае сферической симметрии конструкции, уравнение может быть превращено в уравнение Лежандра. В общем случае, при соответствующем подборе параметров, уравнение может превратиться в уравнения Римана, Гаусса Куммера, Лагерра, Эрмита и др.

**Амплитудно-фазово-частотные характеристики**

Амплитудно-фазово-частотными характеристиками (АФЧХ) называется функциональная взаимосвязь всех трех из названных параметров: амплитуды - максимального значения отклонения давления от точки равновесия при возникновении автоколебаний, в условиях неустойчивой работы ЖРД, частоты этих колебаний и фазы. Наиболее наглядно эта взаимосвязь проявляется при анализе главного уравнения колебательного звена

$$\frac{d^2p}{d\bar{\tau}^2} + \frac{4v}{R^2} \frac{dp}{d\bar{\tau}} + \frac{4v}{R^2} \cdot \kappa M^2 \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\bar{\tau}} p = 0.$$

Поскольку статическое давление системы, определяет в случае начала неустойчивой работы ЖРД общий газодинамический аспект и колебательный аспект, для удобства его можно разложить на сумму некоего среднего давления и колебательной его составляющей  $p = \bar{p} + \tilde{p}$ .

В отличие от рейнольдсова подхода, где так называемому распульсированию были подвергнуты, в том числе и векторная величина скорости турбулентного потока, данная операция является математически строгой, так как давление представляет собой скалярную функцию и не требуется заботиться о её направлении. После чего главное газодинамическое уравнение колебательного звена может быть представлено в виде

$$\frac{d^2\tilde{p}}{d\bar{\tau}^2} + 4 \frac{v}{R^2} \frac{d\tilde{p}}{d\bar{\tau}} + 4 \frac{v}{R^2} \cdot \kappa M^2 \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\bar{\tau}} \tilde{p} = 4\mu\omega^2 \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\bar{\tau}}.$$

Уравнение превратилось в нелинейное уравнение второго порядка относительно колебательной составляющей давления. Следует отметить, что если неустойчивость не возникает, точнее, если не возникает хотя бы колебаний относительно некоего среднего постоянного по величине статического давления, то уравнение

превращается в уравнение с нулевыми членами и тогда для газодинамических расчетов можно пользоваться главным газодинамическим уравнением системы. Для условий ЖРД, когда  $\bar{p} = \text{const}$ , то уравнение можно записать в безразмерном виде, полагая

$$\pi^0 = \tilde{p}/\bar{p};$$

$$\frac{d^2\pi^0}{d\bar{\tau}^2} + 4 \frac{v}{R^2} \frac{d\pi^0}{d\bar{\tau}} + 4 \frac{v}{R^2} \frac{d\pi^0}{d\bar{\tau}} \cdot \kappa M^2 \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\bar{\tau}} \pi^0 = 4 \frac{v}{R^2} \kappa M^2 \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\bar{\tau}}.$$

В случае постоянства коэффициентов в левой части уравнение, соответствует вынужденным колебаниям. При этом после введения обозначений

$$2\delta = 4v/R^2,$$

где  $\delta$  - коэффициент затухания;

$$\omega_0^2 = 4 \frac{v}{R^2} \kappa M^2 \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\bar{\tau}}.$$

$\omega_0$  - собственная частота колебательной системы;

$$F = 4 \frac{v}{R^2} \kappa M^2 \frac{d \ln \frac{R}{\omega}}{d\bar{\tau}} = F_B \sin \omega_B \cdot \bar{\tau},$$

где  $F$  - вынуждающая сила, уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\pi^0}{d\bar{\tau}^2} + 2\delta \frac{d\pi^0}{d\bar{\tau}} + 4 \omega_0^2 \pi^0 = F_B \sin \omega_B \cdot \bar{\tau}.$$

Отметим, что коэффициент перед третьим членом в левой части и правая часть являются функциями сжимаемости, так как они содержат число Маха. Это означает, что именно эти функции определяют упругость колебательной системы и именно они формируют частотные характеристики колеблющейся среды. Общее решение такого дифференциального уравнения с правой частью есть сумма общего решения уравнения без правой части и частного решения данного уравнения

$$\pi^0 = \pi_{\text{max}}^0 e^{-\delta\bar{\tau}} \cos(\omega_0\bar{\tau} - \varphi) + A \sin \omega_B \bar{\tau} + B \cos \omega_B \bar{\tau}.$$

Здесь коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются путем повторного дифференцирования общего решения и последующего приравнивания коэффициентов при синусах и косинусах. Максимальное значение  $\pi_{\text{max}}^0$  и величина сдвига фаз  $\varphi$  определяется на основании начальных условий

$$\pi_{\text{max}}^0 = \frac{F_B}{\omega_B^2} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 2 \frac{\delta^2}{\omega_0^2} \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{2 \frac{\delta}{\omega_0} \frac{\omega_B}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega_B^4}{\omega_0^4}},$$

где  $\delta_{\text{кр}}$  - коэффициент критического затухания, то есть та граница, при которой дискриминант характеристического уравнения становится отрицательным и решение теряет смысл. Анализ показывает, что при равенстве частот  $\omega_0$  и  $\omega_B$  значение амплитуды  $\pi_{\text{max}}^0$  - наибольшее. При таком равенстве может наступить резонанс и реализуется вторая потеря устойчивости работы ЖРД. Но даже в случае резонанса конструкция может остаться работоспособной, если будет достаточно циклической прочности материала. При  $\omega_0 = \omega_B$  величина сдвига фаз становится равной 90 градусам. На рис. 1 и 2 в виде иллюстраций представлены наиболее типичные амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики.

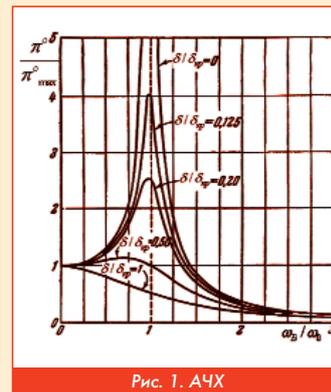


Рис. 1. АЧХ

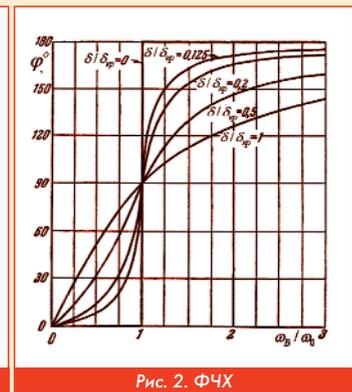


Рис. 2. ФЧХ

**Формирование начальных условий задачи**

Для того чтобы конкретизировать начальные условия рассмотрим подробно каждое из них. Условие  $\pi^0(\tau = 0) = \pi_0$  равносильно заданию статического давления  $p$  в начальный момент времени. Второе условие равносильно заданию производной от статического давления  $dp/d\tau$  также в начальный момент времени. Преобразуем последнее выражение следующим образом

$$\frac{dp}{d\tau} = a^2 \frac{dp}{d\tau} = \frac{a^2}{v_k} G.$$

Второе начальное условие, по существу, превратилось в условие по расходу  $G(\tau = 0) = G_0$ .

Выражая расход через скорость фронта горения  $u$ , получим  $G = u\rho F_k$ . Связь скорости фронта горения со скоростью горения найдем используя теорию Я.Б. Зельдовича и Д.А. Франк-Каменецкого [3], из которой следует, что  $u \sim \sqrt{Wa}$ , где  $W$  - скорость горения;  $a$  - коэффициент температуропроводности.

В итоге получаем, что, поскольку  $G \sim \sqrt{W}$ , начальное условие преобразуется к виду  $W(\tau = 0) = W_0$ .

Как было показано ранее величину скорости химических преобразований (горения)  $W$  можно рассчитать, зная статическое давление в камере и число Дамкеллера. Но! Известно, что величина скорости горения существенным образом зависит от коэффициента соотношения компонентов  $K_m$ . Тогда приходим к следующему практически важному выводу. Второе начальное условие можно сформулировать как  $K_m(\tau = 0) = K_{m0}$ .

Такая запись делает определенным задание граничных условий с точки зрения положений ГОСТ на разработку технического задания на ЖРД [4]. В ГОСТе декларируется уровень рабочих и гарантийных пределов изменения условий и режимов работы двигателя при отработке и контрольных испытаниях. Другими словами ГОСТом определяется **рабочий квадрат**, ограниченный параметрами давления в камере ( $P_k^{min}$  и  $P_k^{max}$ ) и соотношением компонентов топлива ( $K_m^{min}$  и  $K_m^{max}$ ). Кроме того, ГОСТом определяются рабочие и гарантийные пределы, а также диапазоны при обработке, КТИ, КВИ и СИ. В результате постоянные интегрирования могут быть выражены как функции  $C_1 = C_1(P_k)$  и  $C_2 = C_2(K_m)$ . **!**

**Литература**

1. Кочетков Ю.М. Турбулентность и неустойчивость в ЖРД.// Двигатель № 6, 2011 г.
2. Светушкин К.И. об анализе энергетических характеристик камер ЖРД. Ракетно-космическая техника, М. НИИТП, 1986 г. (в кн. Рабочие процессы в жидкостном ракетном двигателе и их моделирование, авт. Лебединский Е.В., Беренс Ю.Л., Меньшикова О.М. и др. М. Машиностроение, 2008 г.
3. Хитрин Л.Н. Физика горения и взрыва. М. Изд. Московского университета, 1952 г.
4. ГОСТ В 21262-75 Двигатели ракетные жидкостные. Обеспечение и контроль надежности.

**ИНФОРМАЦИЯ**

Доводим до сведения наших читателей, что издатели журнала "Двигатель" решили ознаменовать четырнадцатый год своего существования вступлением в Ассоциацию "Союз авиационного двигателестроения" (АССАД).

Наш журнал с самого начала издания в своём теперешнем виде весьма плотно сотрудничает с АССАД. Руководители и самой Ассоциации, и входящих в неё организаций входят в наш Редакционный совет и активно печатаются на наших страницах.

Так что произошедшее событие - скорее констатация факта и свидетельство времени, чем что-то небывалое, признак того, что для совместной работы надо собираться вместе. Особенно в свете предстоящих задач. **!**

**ИНФОРМАЦИЯ**

В последние годы всё настойчивее в авиационном сообществе обсуждается проблема создания беспилотных летательных аппаратов для удовлетворения запросов военных. Они связаны прежде всего с диапазоном требований, причем, как правило, противоречивых: максимальная дальность и наибольшее время полета, в состав полезной нагрузки помимо разведывательной аппаратуры должно входить вооружение - ракеты, торпеды и т.д. и т.п. Все проблемы в одночасье снять невозможно, поэтому конструкторы, технологи, инженеры и ученые подходят к решению задач постепенно, по мере их поступления. Возникло желание иметь сверхзвуковой беспилотник, пожалуйста: ученые приступили к разработке двигателя, позволяющего создавать компактные и дешевые сверхзвуковые беспилотники.

Так, компания Starkey Aerospace (Starcor) начала разрабатывать высокоэффективный турбореактивный двигатель, работающий без смазки, который можно будет использовать на беспилотных летательных аппаратах и крылатых ракетах. Предполагается, что двигатель L-FX00 будет иметь небольшой вес, высокую топливную эффективность, большие ресурс и интервал между капитальными ремонтами.

Конструкторы намечают создать несколько модификаций L-FX00, некоторые из которых будут использовать управляемый вектор тяги и форсажную камеру.

На основе этого двигателя эта же компания разработала проекты сверхзвуковых беспилотных летательных аппаратов, развивающих скорость 1,4 и 1,7 Маха. Вполне возможно, что стоимость этих сверхзвуковых беспилотников не будет чрезмерной и, как

уверяют разработчики, будет в пределах \$50...100 тыс. за один самолет.

Первым компактным сверхзвуковым БПЛА станет GOJETT. Для его создания будут привлечены современные IT-технологии проектирования и испытаний.

Для него разрабатывается двигатель с тягой 90 кгс. Считается, что он станет сердцем компактных (массой около 50 кг) и дешевых сверхзвуковых БПЛА, уже на основе которого будут разработаны более тяжелые сверхзвуковые боевые беспилотные машины.

В этом году планируется построить прототип, развивающий скорость 1,4 М, затем будет изготовлен более скоростной аппарат - до 1,7 М. GOJETT будет иметь треугольные крылья размахом 1,27 м с элевонами. Его длина будет составлять 1,76 м. **!**

**ИНФОРМАЦИЯ**

В Научно-испытательном центре ракетно-космической промышленности продолжается подготовка к двум холодным и огневому испытанию первой ступени ракеты-носителя (РН) "Союз-2.1в". Она уже установлена на испытательный стенд ИС-102. Специалисты НИЦ РКП выполняют цикл подготовительных работ.

Двухступенчатая ракета-носитель "Союз-2" этапа модернизации 1в предназначена для запуска космических аппаратов со стартовых комплексов РН "Союз-2". Ракета-носитель разрабатывается на базе РН "Союз-2" этапа 1б, со снятием боковых блоков, установкой на центральном блоке двигателя НК-33А и рулевого двига-

теля РД0110Р. Блок второй ступени займется с доработкой с блока 3-й ступени РН "Союз-2" этапа 1б.

Использование существующих технического и стартового комплексов, позволит снизить затраты на разработку, эксплуатацию и запуск. **!**