УДК 532.526.4

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ МЕТОДАМИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Александр Иванович Бажанов, академик МИА
Николай Юрьевич Кочетков, к.т.н., старший преподаватель ФГБОУ ВО "МАИ (НИУ)"
Анатолий Алексеевич Сперанский, вице-президент РИА, DExpert ISCED, академик РИА и МИА

В продолжении цикла работ по теме "Механика сплошных сред" рассматривается специальная газодинамическая задача ламинарного течения, применимая для расчетных исследований течений жидкости, газа и плазмы. Записаны новые уравнения математической физики параболического типа, описывающие большой класс газодинамических задач, встречающихся в практике ракетной техники, промышленной и космической энергетики и других народно-хозяйственных отраслей. Новая математическая задача может быть решена с помощью известных методов решения параболических уравнений математической физики. Для иллюстрации возможного решения приведен в виде цитаты [1] аналогичный классический пример решения уравнения теплопроводности. Полученное уравнение для ламинарного течения строго описывает пристенные течения в камерах ЖРД, течение продуктов сгорания в РДТТ по всему тракту и течения в сверхзвуковых соплах ракетных двигателей.

In the continuation of the cycle of works on the topic "Continuum mechanics", a special gas-dynamic problem of laminar flow is considered, applicable for computational studies of fluid, gas and plasma flows. New parabolic-type mathematical physics equations describing a large class of gas-dynamic problems encountered in the practice of rocket technology, industrial and space energy and other national economic sectors are written down. A new mathematical problem can be solved using well-known methods for solving parabolic equations of mathematical physics. To illustrate a possible solution, a similar classical example of solving the heat equation is given in the form of a quote [1]. The resulting equation for laminar flow strictly describes the wall-to-wall flows in the LRE chambers, the flow of combustion products in the RDTT along the entire path and the flow in supersonic nozzles of rocket engines.

Ключевые слова: *механика сплошных сред, ламинарное течение, параболическое уравнение математической физики.*
Keywords: *continuum mechanics, laminar flow, parabolic equation of mathematical physics.*

Многие задачи газовой динамики описываются уравнением движения или уравнением Навье-Стокса, которое записывается в следующем виде:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tau}=-\mathrm{grad}\,P+\mu\,\Delta\vec{V}+\frac{1}{3}\mu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{V}.$$

Если раскрыть субстанциональную производную и лапласиан скорости, то получим векторное уравнение вида:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tau}+\rho\,\mathrm{grad}\frac{\vec{V}^2}{2}+\rho[\mathrm{rot}\vec{V}\cdot\vec{V}]+\mathrm{grad}P-\frac{4}{3}\mu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{V}+\mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{V}=0.$$

Учитывая основные утверждения о невозможности существования в сверхзвуковом потоке вихрей, избавляемся от них, вычеркивая из уравнения все роторы: остаётся уравнение описывающее ламинарное течение и включающее в себя вязкие и упругие члены.

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tau}+\rho\,\mathrm{grad}\frac{\vec{V}^2}{2}+\mathrm{grad}\left(p-\frac{4}{3}\mu\,\mathrm{div}\vec{V}\right)=0.$$

Вывод уравнения ламинарного течения и постановка задачи

Прежде всего преобразуем уравнение к виду удобному для анализа:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tau}+\mathrm{grad}\left(P+\frac{\rho V^2}{2}\right)-\frac{V^2}{2}\mathrm{grad}\rho=\frac{4}{3}\mu\,\Delta\vec{V}.$$

Воспользовавшись понятием постоянства полного давления, получаем:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tau}-\frac{V^2}{2}\mathrm{grad}\rho=\frac{4}{3}\mu\,\Delta\vec{V}.$$

Далее, превращая $\mathrm{grad}\rho$ в $\mathrm{grad}P$, получаем:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tau}-\frac{V^2}{2a^2}\mathrm{grad}P=\frac{4}{3}\mu\,\Delta\vec{V}.$$

Разделим на коэффициент при производной по времени и запишем в каноническом виде:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tau}=\frac{4}{3}\upsilon\Delta\vec{V}+\frac{M^2}{2\rho}\mathrm{grad}P.$$

Далее, если переобозначить переменные и коэффициенты, получим привычную математическую запись уравнения:

$$u_t=a^2\Delta u+f(x,t),$$

где:

$$u_t=\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau};\quad \Delta u=\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial z^2};\quad a^2=\frac{4}{3}\upsilon;\quad f(x,t)=\frac{M^2}{2\rho}\mathrm{grad}P.$$

Полученное уравнение относится к типу параболических уравнений и называется уравнение теплопроводности.

Уравнение теплопроводности, постановка первой краевой задачи

Полученное уравнение движения ламинарного потока совпало полностью с уравнением теплопроводности, которое в девятнадцатом веке открыл великий учёный Жан Батист Жозеф Фурье. Поражает поистине методическое совершенство этого человека, который сформулировал и обосновал физическую задачу, предложил метод её решения, один из немногих в теории математической физики, и дал способ представления решения в виде наглядных функций. Его достижения в этой области можно сформулировать тремя позициями:

1. Уравнение теплопроводности Фурье;
2. Метод разделения переменных Фурье;
3. Разложение функций в ряды Фурье.

Постепенно изложим последовательность решения однородной краевой задачи - исследование ламинарного течения на примере задачи теплопроводности. При этом будем подразумевать под значением (u) температуру, а под величиной (a) - коэффициент температуропроводности. Функция $f(x,t)$ идентифицируется как источниковый член.

Для отличия задач условно принято преобразование временного аргумента $\tau \to t$.

Перейдём к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в одномерной постановке:

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t) \tag{1}$$

с начальным условием:

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

и граничными условиями:

$$u(0,t) = \mu_1(t); \quad u(l,t) = \mu_2(t). \tag{3}$$

Здесь $\varphi(x)$ - значение функции в начальный момент времени; μ_1 и μ_2 - значение температуры на границе области.

Изучение общей первой краевой задачи начнём с решения следующей простейшей задачи: найти решение однородного уравнения $u_t = a^2u_{xx}$ (4), удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = \varphi(x)$ (2), и нулевым граничным условиям

$$u(0,t) = 0,$$
$$u(l,t) = 0.$$

Метод разделения переменных

Воспользуемся методом разделения переменных Фурье. Иллюстрация этого метода применительно к задаче параболического типа исключительно хорошо представлена в классический книге по теории математической физики авторами А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским. Воспользуемся представленным в ней изложением. Ниже процитируем оригинальный текст:

"Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу.

Найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{5}$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям:

$$u(0,t) = 0,$$
$$u(l,t) = 0,$$

и представимое в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{6}$$

где $X(x)$ - функция только переменного x,

$T(t)$ - функция только переменного t.

Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (4) и произведя деление обеих частей равенства на a^2XT, получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{7}$$

где λ = const, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая - только от x.

Отсюда следует, что:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$
$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{8'}$$

Граничные условия (5) дают:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0,\ X(l) = 0". \tag{10}$$

Использование рядов Фурье

Фурье было показано, что только для значений параметра λ равных

$$\lambda_T = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (n = 1,2,3, ...) \tag{11}$$

существуют нетривиальные решения уравнения (8), равные

$$X_n = \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{12}$$

Этим значениям λ_n соответствует решения уравнения (8′)

$$T_n(t) = C_n\, e^{-a^2\lambda_n t}, \tag{13}$$

где C_n - не определенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{14}$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (I). Составим формально ряд:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{15}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{16}$$

то есть C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении её в ряд по синусам на интервале (0,1):

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^1 \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь ряд (15) с коэффициентом C_n, определяемыми по формуле (17), и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (I). Для этого надо доказать, что функция $u(x,t)$ определяемая рядом (15), дифференцируема, удовлетворяет уравнению и области $0 < x < l$, $t > 0$ и непрерывна в точках границы этой области (при $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Так как уравнение (4) линейно, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференцировать, почленно дважды по x и один раз по t. Покажем, что при $t > \underline{t} > 0$ ($\underline{t}$ - любое вспомогательное число ряда производных)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}$$

сходятся равномерно. В самом деле,

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}\Bigg| = \left|-C_n\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2 e^{-\frac{\pi n^2}{l}a^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x\right| < \left|C_n\right|\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2 e^{-\frac{\pi n^2}{l}a^2t}.$$

В дальнейшем будут сформулированы дополнительные требования, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$. Предположим сначала, что $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)| < M$; тогда:

$$\left|C_n\right| = \left|\frac{2}{l}\right|\left|\int_0^1 \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\right| < 2M.$$

$a^2\underline{t}$

Откуда следует, что

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2 e^{-\frac{\pi n^2}{l}} \quad \text{для } t \geqslant \underline{t}.$$

И аналогично

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2 e^{-\frac{\pi n^2}{l}a^2\underline{t}} \quad \text{для } t \geqslant \underline{t}.$$

Вообще

$$\left|\frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \partial x^l}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+1} a^{2k}n^{2k+1} e^{-\frac{\pi n^2}{l}a^2\underline{t}} \quad \text{для } t \geqslant \underline{t}.$$

Исследуем сходимость мажорантного ряда $\{a_n\}$, где

$$a_n = Nn^q e^{-\frac{\pi n^2}{l}a^2\underline{t}}.$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{n^q}\,\frac{e^{-\frac{\pi^2}{l}a^2(n^2+2n+1)\underline{t}}}{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^5\underline{t}} = \lim\left(a + \frac{1}{n}\right)^q e^{-\frac{\pi^2}{l}a^2(2n+1)\underline{t}} = 0.$$

Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (15) любое число раз в области $t > \underline{t} > 0$. Далее, пользуясь принципом суперпозиции, заключаем, что функция, определенная этим способом, удовлетворяет уравнению (4). В силу произвольности $\underline{t}$ это имеет место для всех $\underline{t} > 0$. Тем самым доказано, что при $t > 0$ ряд (15) представляет функцию, дифференцируемую нужное число раз и удовлетворяющую уравнению (4).

При доказательстве того, что ряд (15) удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ при $t > 0$, была использована только ограниченность коэффициентов Фурье C_n, которая, в частности, будет иметь место для любой ограниченной функции $\varphi(x)$.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(l) = 0$, то ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}\, x$$

определяет непрерывную функцию при $t \geqslant 0$.

Действительно, из неравенства

$$|u_n(x,t)| < |C_n|,$$

получается, что при $t \geqslant 0$ $0 \leqslant x < l$ сразу же следует равномерная сходимость ряда (15) при $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x < l$, что и доказывает справедливость сделанного выше утверждения, если учесть, что для непрерывной и кусочно-гладкой функции $\varphi(x)$ ряд из модулей и коэффициентов Фурье сходится, если $\varphi(0) = \varphi(l) = 0^2$.

Итак, задача нахождения решения первой краевой задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями и непрерывным, кусочно-гладким начальным условием решена полностью".

Возможности практического использования

Возможности практического использования уравнения, описывающего ламинарное движение, весьма обширны. Практически все области течения в РДТТ являются ламинарными. Исключение представляют зоны встречных потоков из-под утопленной части сопла и части зонтичных и звездообразных каналов. Газящие поверхности заряда и сопла так же не способствуют появлению турбулентности [5, 6].

В ЖРД на протяжении всего тракта движения рабочего тела поток разгоняется и градиент давления всегда отрицательный. Препятствием ускоряющемуся потоку, приводящему к турбулентности, могут оказаться вязкость, конструктивные выступы и пересекающиеся струи в области смесительной головки. Трение вдоль стенок не оказывает влияния на возникновения турбулентности внутри ламинарного подслоя.

Абсолютно ***все задачи конвективного теплообмена***, встречающиеся в ракетных, промышленных и добывающих установках, ***всегда ламинарные***. Это обусловлено тем, что при любой конфигурации конструкции, при любой паре: материал стенки-омываемое его рабочее тело, всегда найдется область, примыкающая к стенке, обладающая свойствами ламинарного потока. То есть свойствами стратификации (послойности), сжимаемости (упругости) и вязкости.

Таким образом, имея основное уравнение, появляется возможность постановки одной из классических задач уравнений математической физики. Важно отметить, что для подобных уравнений доказаны теоремы существования и единственности.

Основной вывод работы

Получено новое уравнение математической физики параболического типа, описывающее ламинарное течение рабочего тела и позволяющее получить точное решение в виде полей скоростей. Один из способов получения такого точного решения был проиллюстрирован на примере решения уравнения теплопроводности методом разделения переменных и процитирован из книги А.Н. Тихонова и А.А. Самарского. Другой очевидный способ будет в ближайшее время разработан и представлен в последующих статьях. Это - классический метод характеристик.

Литература

1. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики // М. Наука, 1977 г.
2. В.В. Струминский. Механика турбулентных потоков. Основные направления теоретических исследований проблем турбулентности // М. Наука, 1980 г.
3. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа // М. Физматлит, 1959 г.
4. Ю.М. Кочетков. Турбулентность сверхзвуковых течений (памяти Гилевича) // Двигатель № 2, 2013 г.
5. Ю.М. Кочетков, Н.Ю. Кочетков. Турбулентность. Особенности термогазодинамики РДТТ // Двигатель № 4, 2021 г.
6. Н.Ю. Кочетков, Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Особенности термогазодинамики РДТТ с двухсоставными зарядами // Двигатель № 5,6, 2021 г.

Связь с авторами: kolabuy@gmail.com

ИНФОРМАЦИЯ. Рекорды "Spirit of Innovation"

Во время проведения испытательных полётов, состоявшихся 16 ноября 2021 г. на экспериментальном авиационном полигоне британского Министерства обороны Boscombe Down полностью электрический самолет "Spirit of Innovation" компании Rolls-Royce на дистанции 3 км разогнался до 555,9 км/ч, побив существующий рекорд на 213 км/ч. Во время последующих полетов этот самолет смог разогнаться на 15-километровой дистанции до скорости 532,1 км/ч, побив предыдущий рекорд на 292,8 км/ч. Ещё один рекорд, установленный на нём, касался скороподъёмности на высоту 3000 м, на которую электрический самолет поднялся всего за 202 с, улучшив время предыдущего рекорда на 60 с.

И уже не на мерной дистанции, а в свободном полёте был установлен рекорд максимальной скорости, который теперь для самолетов с электрической силовой установкой составляет 623 км/ч.

Собранные во время этих полетов данные будут использованы в будущем при разработке электрических двигательных установок, предназначенных для электрических и гибридных самолетов местных авиалиний.

Самолет "Spirit of Innovation" приводится в движение электрической силовой установкой мощностью 400 кВт (более 500 л.с.). Электрическая энергия для электродвигателя запасается в системе аккумуляторных батарей, имеющих на сегодня самый высокий показатель плотности хранения заряда среди подобных систем.

Партнерами компании Rolls-Royce в разработке и создании самолета "Spirit of Innovation" является компания Electroflight, специализирующаяся на технологиях хранения электрической энергии, и компания YASA, направлением деятельности которой является разработка и изготовление двигателей и трансмиссий для электрических транспортных средств.

Разработка самолета "Spirit of Innovation" проводилась в рамках британской программы ACCEL (Accelerating the Electrification of Flight), проводимой институтом ATI (Aerospace Technology Institute) и несколькими другими британскими государственными предприятиями.