УДК 511.17

БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛА

ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

Андрей Иванович Касьян, к.т.н., Университет "Синергия"

Развитие темы. Предыдущие статьи в № 4, 6 - 2018 г. и № 1, 3, 4-6 - 2020 г. № 3 2021 г.

Рассматриваются свойства бесконечных чисел, теория делимости, основная теорема арифметики, каноническое разложение.

Properties of infinite numbers, fundamental theorem of arithmetic and canonical decomposition are considered.

Ключевые слова: ***бесконечные числа, основная теорема арифметики.***

Keywords: ***infinite numbers, fundamental theorem of arithmetic.***

Рассмотрим затронутые ранее вопросы под другим углом зрения. Обратимся к бесконечным произведениям натуральных, в том числе, простых чисел (представляющих собой числа, записываемые в неограниченной форме). Ранее был показано, что простые можно неограниченное число раз перемножать с самими собой. Докажем методом математической индукции (ММИ), что такие бесконечные произведения можно также перемножать между собой и полученное произведение является натуральным числом. Для удобства договоримся об обозначениях. Для простоты бесконечное произведение, например, одного простого (натурального) числа *p* будем кратко обозначать двумя точками: *ppp…*= *p..* (две нижних точки). Тогда базой доказательства будут два сомножителя, состоящие из *k* простых сомножителей *ppp* и *m* простых сомножителей *qqq*. Очевидно, их произведение есть натуральное (*pppqqq* - база доказательства). Предположим, что каждый из наших сомножителей *ppp* и *qqq* домножается на *n* своих сомножителей (*k* + *n*) и (*m* + *n*) и полученное их произведение также является натуральным числом. Если на следующем шаге перейдем к *n* +1 дополнительному сомножителю, то необходимо доказать, что новое произведение также является натуральным. Для этого вынесем за скобки добавленные два сомножителя. Получим (*pppqqq…*)*pq*. По предположению на *n*-ом шаге то, что стоит в скобках, есть натуральное число, и все произведение, очевидно, также есть натуральное. Так как *n* произвольное, то произведение чисел в неограниченной форме записи *p..q..* есть натуральное число. Аналогично, с помощью ММИ можно доказать утверждение для суммы и т.п.

Операция сложения в нашем случае дает некоторое число, которое записываем суммой: *p..* + *q..*, где *p..* и *q..* - бесконечные произведения простых чисел *p* и *q*. Здесь мы можем предположить, что сумма (и любое число) может быть представлена произведением множества двухточечных простых, т.е. сумма равна *p..* + *q..* = *r..s…..t..*, где *r*, *s*, …, *t* - не равные друг другу простые числа (предполагаем *p..* + *q..* = *q..* + *p..*). Противоположным элементом у нас является *-p..*, т.е. *p..* + (*-p..*) = 0. Нуль, очевидно, играет при сложении роль нейтрального элемента. Единица (*1..*), очевидно, играет роль нейтрального элемента при композиции. Тогда для рассматриваемых бесконечных произведений выполняются по определению все арифметические операции. Получили кольцо (такой алгебраический объект). Причем, это кольцо изоморфно (т.е. очень похоже) на кольцо целых чисел (и другие). Мы можем использовать соответствие: числу *n* поставить в соответствие число *n…* Не будем приводить свойства, верные для любых колец.

К рассматриваемому вопросу можно подойти и с другой стороны. Каждое натуральное число *n* по основной теореме арифметики может быть представлено как произведение простых множителей в соответствующих степенях. Это число *n*, умноженное само на себя неограниченное число раз, будет, как ранее доказано, натуральным и записываться рассмотренным произведением множества двухточечных простых. Сумма *n* (конечного) числа бесконечных слагаемых *a..* + *a..* + … +*a..* записывается произведением *na…* Например, *3..+3..=2 3..*, но *3..+3..+3..=3..* и *n..p..+n..q..=n..(p..+q..)*.

Композицию *p..q..* запишем как число *p..q..* = *r..* (которое интуитивно есть натуральное *r* = *pq*, умноженное само на себя неограниченное число раз, обозначаемое двумя точками и представимое в неограниченной форме записи). В этом случае число *r..* - "составное", а *p..* и *q..* - различные "делители" числа *r…* Предположим, что *p..q..* = *q..p..* = *r..* (коммутативность). Дистрибутивность операции относительно сложения запишется так: (*p..* + *q..*)·*r..* = *p..r..*+ *q..r…* Для рассматриваемых чисел можно определить "НОД". Например, для *a..*= *p..q..r..* и *b..*= *q..r..s..* (где *p*, *q*, *r*, *s* - простые) НОД (*a*, *b*) = *q..r…* Правда, технически вычислить НОД произвольных двухточечных чисел трудно. Очевидно, что в рассматриваемом случае справедлива теоретико-числовая теорема о наименьшем делителе, представляющем собой простое число (с двумя точками). С некоторыми оговорками можно считать справедливой теорему о том, что каждое двухточечное число можно представить в виде композиции простых с двумя точками *a..*= *p.. q.. … r.. … s..*, где *p*, *q*,…, *r*,…, *s* - простые числа натурального ряда. Эту теорему можно "объяснить" так, что натуральное (без точек и без степеней - свободное от квадратов) *a* = *p q…r…s* умножается само на себя неограниченное число раз и приводит к результату. Более сложно доказать, что остаток от деления одного числа на другое есть *r..* (возможно, *r..*= *0*). Наконец, деление с остатком можно задать аксиоматически для любых рассматриваемых чисел (*a..*= *b..q..*+ *r..*). Произведение обычного натурального на двухточечное трактуется как *2p..*= *p..*+ *p..*, а произведение простого *p* на *p..* будем записывать *pp..*= *p…* Опустим далее для краткости две точки, подразумевая их в нужных местах.

Основная теорема для нашего случая доказывается методом математической индукции и гласит, что любое (двухточечное) число раскладывается "единственным" способом на простые множители, с точностью до бесконечного произведения (и порядка): *a* = *pq…r…*. Каноническое разложение в нашем случае некоторого натурального числа *a* также можно представить композицией *a* = *pq…r*, но произведение не содержит по договоренности никаких степеней (на самом деле все степени сомножителей бесконечные).

Введем далее более понятную форму записи бесконечных чисел и систему "счисления", основанную на простых числах с двумя точками. Базисные элементы системы являются простыми, начиная с 2 и далее. Тогда, исходя из изложенного, любое двухточечное будем записать через простые, перемноженные неограниченное число раз: 3 = 1·3 + 0; 5 = 1·5 + 0; 6 = 1·5 +1; 7 = 1· 7 + 0; 14 = 2·7 + 0. Другими словами, получаем следующую форму записи наших чисел. Тройка с двумя точками записывается (десятичными) цифрами в виде 3 = 1°00. Нули указывают на отсутствие слагаемого с двухточечной двойкой (отсутствие соответствующего разряда) и единицы. Пятерка с двумя точками, в нашем случае, записывается в виде 5 = 1°000. Нули стоят у разрядов двойки, тройки, а также единицы. Для каждого двухточечного числа в каждом разряде стоят соответствующие коэффициенты - обычные цифры, не превосходящие цифровую запись соответствующего простого разряда. Так, для двухточечного числа 110.. наша запись в системе будет иметь вид 10 00000, т.е. 10 11, а число 111 будет записываться 10°00001. Тогда сложение должно осуществляться "по модулю". Например, сумма 30000+40001 будет равна10001, т.к. 3 + 4 = 7. Умножение придется производить по частям: 30000·40001= 30000·40000+30000= 50000+30000= 20000 и т.д.

(*Продолжение следует.*)

Литература

1. П.Г. Дирихле. Лекции по теории чисел. М.: Книга, 2014 г.
2. А.А. Бухштаб. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966 г.
3. А.И. Касьян. Бесконечные числа // Двигатель № 1, 2020 г.
4. А.И. Касьян. Бесконечные числа // Двигатель № 3, 2020 г.
5. А.И. Касьян. Бесконечные числа // Двигатель № 4-6, 2020 г.
6. А.И. Касьян. Бесконечные числа // Двигатель № 3, 2021 г.