УДК 511.17

БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛА

ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

Развитие темы. Предыдущие статьи в № 4, 6 - 2018 г. и № 1, 3, 4-6 - 2020 г.

Андрей Иванович Касьян, к.т.н., МФПУ "Синергия"

Рассматриваются свойства бесконечных чисел, теория делимости, основная теорема арифметики, каноническое разложение.

Properties of infinite numbers, fundamental theorem of arithmetic and canonical decomposition are considered.

Ключевые слова: ***бесконечные числа, основная теорема арифметики.***

Keywords: ***infinite numbers, fundamental theorem of arithmetic.***

Для простоты будем рассматривать в основном натуральные числа вместе с нулем. Система счисления - обычная десятичная. Мы не будем также обсуждать первоначальные законы и теоремы арифметики, а рассмотрим некоторые фундаментальные положения, под углом зрения чисел в неограниченной форме записи. Например, по аксиоме Архимеда для *a* и *b* существует натуральное число с, такое, что *bc* > *a*. Однако, для произвольного числа *a*, заданного в неограниченной форме записи ("бесконечного"), фактически определить или оценить *c* не представляется возможным. Хотя гипотетически аксиому можно рассматривать как "очевидную". Например, число *a* можно задать так: первая цифра (которая является старшим разрядом *a*) 1, вторая за ней 2, и так далее, пробегая весь ряд натуральных чисел. Это число а = 1234... (согласованное с натуральным рядом) существует, так как множество натуральных бесконечно и конструктивно задано - задана каждая его цифра. Далее, для любого *b* в этом случае не представляется возможным получить какую-то информацию о *c* для выполнения неравенства. Тем не менее, *c* существует. Можно утверждать, что существует число *d*, большее *a* (*d* = 2234...).

Для любых двух чисел, одно из которых бесконечное, невозможно найти НОД (*a*, *b*), хотя делитель и существует (он недоступен, может быть равен 1). Точно так же, утверждение, что для любых целых *a* и *b* > 0 существуют, и притом единственные, целые *q* и *r*, такие, что *a* = *bq* + *r*, 0 <= *r* < *b*, справедливо, но для бесконечного *a* проблематично найти целые *q* и *r*. (Заметим, что любое натуральное, включая бесконечное, является делителем самого себя). Основным недостатком классического доказательства приведенной теоремы [2] является то, что предполагается в "динамике" найти произведение *bc*, которое больше *a*, за конечное число шагов (произведение *bc* может достигнуть величины, большей *a* по аксиоме Архимеда).

Основная теорема арифметики, которая доказывается методом математической индукции (ММИ) условно справедлива и конструктивно неисполнима. При доказательстве также предполагается достижение "в конце концов" разложения числа на простые множители. Основным недостатком при доказательстве является использование термина "единственности разложения". Рассмотрим пример. Пусть в разложение некоторого числа *a* в неограниченной форме записи входит бесконечное произведение одного и того же простого числа *p*. (Произведение - это закон композиции множества натуральных чисел на себя. Количество сомножителей не может быть ограничено сверху. ММИ можно доказать, что если возможно произведение из *n* сомножителей, то возможно и *n* + 1. И эта операция не должна выводить за границы натурального ряда. Следовательно, рассматриваемое разложение, с учетом области целостности, легитимно [1] и произведение дает натуральное число. Каждый раз, при последующем умножении на *p*, мы получаем число. Бесконечные произведения рассматриваются в математическом анализе). Далее, в этом произведении (т.е. в числе а) сократим все сомножители *p*, стоящие на четных местах (сократим бесконечное множество *p*). Полученное число *a* имеет то же самое разложение? Этот процесс можно продолжить и сокращать далее. Из теорем теории множеств известно, что часть бесконечного множества может быть равномощна всему множеству. Поэтому можно только условно говорить в общем случае об единственности разложения произвольного числа на множители. Можно говорить "с точностью, до бесконечного произведения чисел *p*".

Аналогично, каноническое разложение также условно. Обычно степень числа определяется как конечное произведение, а бесконечное произведение записывается другой формулой. Могут последовать упреки, что в представлении некоторого бесконечного числа в данной системе счисления используются (очевидно) бесконечные степени основания. Но в этом случае бесконечные степени согласованы с порядком и их возникновение естественно. Т.е. известно: какая степень, идет за какой, где стоит. Например, число 1(0) имеет во всех позициях нули, кроме первой, и представляет собой неограниченное произведение десяток Число 1(0)1 больше на единицу, а число 2(0) = 1(0) + 1(0). Еще одна затруднительная ситуация возникает, когда число раскладывается на произвольное число произвольных сомножителей. Здесь порядок не обнаруживается. Основание натуральных логарифмов, например, или квадратный корень из 2 в своем представлении в десятичной системе счисления имеют бесконечные степени (правда, отрицательные). Многие рациональные числа также, например, 1/3, что не вызывает никаких возражений. То, что степени отрицательны, не имеет принципиального значения. Бесконечные степени в подобных разложениях встречаются бесконечное число раз. Действия с ними элементарны: 1/0,3(3). В итоге, каноническое разложение, в общем случае, проблематично, как и остальное. Все трудности исчезнут, если рассматривать конечные натуральные числа (которых конечное множество).

(Продолжение следует.)

Литература

1. П.Г. Дирихле. Лекции по теории чисел. М.: Книга, 2014 г.
2. А.А. Бухштаб. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966 г.
3. А.И. Касьян. Бесконечные числа // Двигатель № 1, 2020 г.
4. А.И. Касьян. Бесконечные числа // Двигатель № 3, 2020 г.
5. А.И. Касьян. Бесконечные числа // Двигатель № 4-6, 2020 г.