УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ФОРМЕ ПУАССОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ

Мгер Каджикович Мкртчян, инженер-конструктор 3 кат., АО ГНПП "Регион"

Предлагается новая запись уравнении энергии в форме Пуассона, полученная путем преобразования уравнения движения в условиях вязкой-сжимаемой среды. Уравнение является частью постановки задачи решения газового поля.

A new Poisson-shaped energy equation is proposed, which is obtained by transforming the equation of motion in a viscous-compressible medium. The equation is part of the gas field solution problem statement.

Ключевые слова: уравнение энергии, уравнение движения, ламинарное течение.

Keywords: energy equation, equation of motion, laminar flow.

Для определения газового поля в конструкциях ракетного двигателя необходимо корректное задание основных уравнений и граничных условий [1]. В качестве дополнительных уравнений к уравнению движения обычно добавляют уравнение энергии, которое предлагается записать в более универсальной форме: в виде уравнения Пуассона.

Запишем уравнение движения ламинарного течения, полученное в работе [2].

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\rho\,\mathrm{grad}\left(\frac{\vec{V}^2}{2}\right)+\mathrm{grad}\left(p-\frac{4}{3}\mu\,\mathrm{div}(\vec{V})\right)=0.$$

Распишем уравнение в скалярном виде:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{4}{3}\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right),\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{4}{3}\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right).\end{cases}$$

Домножим первое уравнение на $\frac{\partial}{\partial x}$, а второе на $\frac{\partial}{\partial y}$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\dfrac{4}{3}\dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right),\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+u\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\dfrac{4}{3}\dfrac{\mu}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right).\end{cases}$$

Складываем оба уравнения и после несложных преобразований имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)+\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right).$$

Выносим лапласиан давления и получаем:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=-\rho*\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+u\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\\ +v\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+2\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{4}{3}\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\dfrac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)\end{bmatrix}.$$

Преобразуем один член к такому виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial t}div(\vec{V}).$$

Дискретизируем и получим:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(div(\vec{V})^{n+1}-div(\vec{V})^{n}\right),$$

где *n+1* и *n* последовательные шаги по времени.

Приравниваем к нулю $div(\vec{V})^{n+1}=0$ так как она рассчитываться в уравнении движения и тогда получается:

$$-\frac{1}{\Delta t}div(\vec{V})\text{ или }-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

и получим уравнение энергии в форме Пуассона ($\Delta p+\rho f(\bar{V})=0$):

$$\Delta p+\rho*\begin{bmatrix}-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+u\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\\ +v\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+2\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{4}{3}\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\dfrac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right)\end{bmatrix}=0.$$

В результате анализа получены новые преобразования и запись в форме уравнения Пуассона.

Литература:

1. Кочетков Ю.М. Турбулентность. Пять теорем как инструмент глобального преобразования уравнений сохранения в целях разработки новых подходов к вычислительной газовой динамике / Кочетков Ю.М. // Двигатель. - 2019. - №4. - С. 20-22

2. Кочетков Ю.М. Турбулентность сверхзвуковых течений / Кочетков Ю.М. // Двигатель. - 2013. - №2. - С. 48-50

Связь с автором: mger_97@mail.ru

МАИ и ОДК-Климов договорились о сотрудничестве

Московский авиационный институт и АО "ОДК-Климов" (входит в Объединённую двигателестроительную корпорацию Госкорпорации Ростех) будут развивать взаимодействие по проектам создания новых двигателей ВК-650В и ВК-1600В, в сфере математического моделирования и целевого обучения студентов.

Обсуждение совместных программ сотрудничества состоялось в рамках визита в МАИ представителей ОДК-Климов. Речь шла о трудоустройстве выпускников МАИ в АО "ОДК-Климов", переподготовке работников предприятия, а также участии в конференциях.

ОДК-Климов активно сотрудничает с петербургскими образовательными организациями высшего образования. Работа велась эпизодически. Теперь она будет организована на системной основе.

В дополнение к уже выполняемым в настоящим момент работам по тематике нового двигателя ВК-1600В будет

рассмотрена возможность привлечения специалистов МАИ к оптимизации узла свободной турбины двигателя ВК-650В и выполнению НИР по математическому моделированию обтекания и потерь энергии в определённых узлах.

Для студентов третьего и более старших курсов института № 2 МАИ "Авиационные, ракетные двигатели и энергетические установки" будет организована презентация по привлечению молодёжи на практику и для трудоустройства выпускников в ОДК-Климов.

https://mail.yandex.ru/?win=35&clid=1858002&uid=1327040#message/176203335421250821