

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Александр Иванович Бажанов, академик МИА

Николай Юрьевич Кочетков, к.т.н., старший преподаватель ФГБОУ ВО "МАИ (НИУ)"

Анатолий Алексеевич Сперанский, вице-президент РИА, DExpert ISCED, академик РИА и МИА

Основной целью человечества, по большому счёту, является обеспечение своего собственного существования, желательного вечно и беспроблемного. Для достижения этой цели служат медицина, сельское хозяйство, промышленность, наука и многое другое. И не всегда движение к цели прямолинейное: борьба с одними болезнями порождает новые, ещё более грозные; транспорт не только перевозит, но и убивает; здания и сооружения рушатся; механизмы ломаются... Потери экономик промышленно развитых стран из-за техногенных катастроф растут из года в год и достигли 5 % от валового национального продукта. Одной из причин такого положения является несоответствие уровня современной техники (среды обитания) и существующих средств определения состояния и алгоритмов прогноза возможности дальнейшей её эксплуатации.

Великие умы человечества пытались осмыслить окружающий мир, описать его на языке физики и математики, причём в максимальной степени соответствуя сущности природы, которая, по нашему современному представлению, четырёхмерна. А в природе всё находится под воздействием всего, в том числе и самого себя, например, верхняя часть здания давит на нижнюю, а в ГТД по действием центробежных сил диск стремится разорвать сам себя. В науке для изучения подобных явлений уже более трёх веков существует механика упругих систем, опирающаяся на основополагающие законы теоретической механики, основные постулаты механики сплошных сред, системно-информационный подход и тензорный аппарат анализа причинно-следственной трансформации массово-энергетических диагностических параметров текущих состояний. Связать теорию и практику можно только при помощи адекватных природе средств измерения, т.е. четырёхмерных.

Ряд ведущих мировых компаний предлагают системы, измеряющие полные механические колебания упругих механических систем тремя (и более) линейными или тремя линейными и тремя вращательными одномерными сенсорами. Однако несовершенство таких измерений состоит в том, что измеряемые компоненты не связаны пространством и временем. В то же время на-

ука утверждает, что все наблюдаемые колебательные процессы природного синтеза состояний в сплошных и упругих средах существенно пространственные (L), спектральные и системно связаны во времени (t), являются амплитудно-фазо-частотными (АФЧ) и соответствуют векторно-фазовой 4D-мерности. Наблюдается разрыв между реальными природными процессами и полученной с помощью этих инструментов информации об этих процессах, и в итоге достоверность диагностики крайне низка.

Обеспечение достоверности измерений, анализа динамического состояния объектов и прогноза возможности их дальнейшей эксплуатации возможно при слиянии возможностей векторно-фазовой 4D- или 7D-мерных систем предикативного анализа и современного научного взгляда на механику сплошных сред, чему и посвящается новый цикл статей.

Механика сплошных сред (МСС) в физике как наука появилась не случайно. Само понятие сплошность подразумевает непрерывность объекта. Это важное понятие предполагает непрерывность и в математике, а значит непрерывность функции. Если функция непрерывна, то она дифференцируема. И к ней, соответственно, можно применять методы дифференциального исчисления. Процесс в соответствии с великим Леонардом Эйлером можно описывать системой дифференциальных уравнений. Существуют параллельные науки - физическая и химическая кинетики. Там другая математика - математическая статистика и теория вероятности. Но эти науки взаимосвязаны и дополняют друг друга. Одна описывает собственно процесс, другая отражает физико-химические свойства рабочего тела.

Механика сплошных сред, как всеобъемлющая наука, включает в себя такие науки как гидродинамика, газовая динамика, механика твердого тела, прочность и теорий деформаций и гомеостаза, электро- и магнитодинамика, а также другие фундаментальные науки. Было сочтено целесообразным опубликовать некоторые актуальные аспекты этой темы в виде цикла статей с привлечением перспективных научных знаний. Начало цикла было решено начать с исследования понятия "сжимаемость".

СЖИМАЕМОСТЬ - ВАЖНОЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО

Редакция открывает новый цикл публикаций на актуальную и практически важную тему – механика сплошных сред. Предполагается в серии статей систематическое изложение новых взглядов на эту уникальную проблему и на её взаимосвязь со смежной и дополняющей ее проблемой – физико-химической кинетикой и молекулярной физикой. Особое место, в этой связи, будут так же занимать весьма продвинутое за последнее время проблемы механики твердого тела, в частности проблемы деформации, сжимаемости, упругости, анизотропии, прочности, акустики и вибрации. Цикл начинается с исследования фундаментального понятия – сжимаемость, характеризующего для газа, жидкости и твердого тела его упругость, ответную реакцию на внешнее возмущение и отвечающее за колебательные процессы.

The editorial board opens a new series of publications on an actual and practically important topic-continuum mechanics. A series of articles is intended to systematically present new views on this unique problem and on its relationship with a related and complementary problem – physico-chemical kinetics and molecular physics. A special place, in this regard, will also be occupied by the very advanced problems of solid mechanics, in particular, the problems of deformation, compressibility, elasticity, anisotropy, strength, acoustics and vibration. The cycle begins with the study of the fundamental concept – compressibility, which characterizes for a gas, liquid and solid its elasticity, response to external perturbation and responsible for oscillatory processes.

Ключевые слова: сжимаемость, упругость, импеданс, вязкоупругая константа.

Keywords: compressibility, elasticity, impedance, viscoelastic constant.

Сжимаемость является следствием воздействия силы (давления) на рабочее тело, которое приводит к уменьшению объёма. Сжимаемость - это склонность газа к расширению или сжатию.

Вводится это понятие как производная объёма по давлению:

$$B = - \frac{dV}{dp}$$

Здесь V - удельный объём на один килограмм. $[V]=\text{м}^3/\text{кг}$
Перейдём от объёма к плотности газа:

$$\rho = \frac{1}{V}, [\rho] = \text{кг}/\text{м}^3.$$

Перепишем:

$$B = -\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\rho} = +\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\rho}.$$

Производная: $\frac{d\rho}{d\rho} = a^2$ - квадрат скорости звука.

Перепишем:

$$B = \frac{1}{\rho^2 a^2}.$$

Переходя к температуре, получим:

$$a^2 = kRT \text{ и } B = \frac{1}{k\rho RT} = \frac{1}{k\rho a^2}.$$

Видимо, это самая понятная формула.

Сжимаемость - это основное свойство сверхзвукового потока. Поскольку поток характеризуется числом Маха:

$$M = \frac{W}{a},$$

то представление его через сжимаемость логично:

$$B = \frac{1}{\rho^2 a^2} \text{ и } a^2 = \frac{1}{\rho B}.$$

Число Маха при этом выразится:

$$M = \frac{W}{\sqrt{\frac{1}{\rho B}}} = \rho W \sqrt{B}.$$

Для анализа полезным может оказаться высокоупругий комплекс:

$$\frac{\mu \sqrt{B}}{r_{\text{крит}}}$$

Проверим размерности:

$$[j] = [\rho W] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = \frac{\text{н} \cdot \text{с}}{\text{м}^3} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}.$$

$$[B] = \left[\frac{1}{k\rho a^2} \right] = \frac{1}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \frac{\text{н}}{\text{кг} \cdot \text{м}}} = \frac{\text{м}^5}{\text{кг} \cdot \text{н}} = \frac{\text{м}^4 \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}} = \left(\frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{кг}} \right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right)^2} = \left[\frac{1}{j^2} \right].$$

$$j = \rho \cdot W.$$

$$\text{Тогда } [M] = [\rho W \sqrt{kB}] = \frac{[\rho W]}{[\rho W]} = 1.$$

Вторым важным свойством дозвукового потока является его упругость, которая зависит от сжимаемости. Сжимаемость здесь проявляется как основной параметр в процессе, описывающим ВЧ-неустойчивость.

ВЧ-неустойчивость - это возникновение автоколебаний, то есть ситуация, когда диссипативные процессы компенсируются дисперсными. Уравнение для описания автоколебаний похоже на уравнение для описания линейных гармонических колебаний, решением которого является синус

$$\ddot{\rho} + \omega_0^2 \rho = 0.$$

В общем случае для механических систем, аналогично с которыми мы будем проводить анализ, уравнения записывают в традиционной форме: $\ddot{\rho} + \omega_0^2 \rho = 0$ - уравнение для пружины.

Или $m\ddot{x} = -kx$. Знак минус из-за того, что реакция происходит в противоположном направлении. Сила слева от равенства характеризует инерционную силу, справа - упругую реакцию.

Если силу разделить на условную площадь $F = x_0^2$, то получим

напряжение, x_0 - характерный размер. И опять с обратным знаком. Далее применим закон Гука $\sigma = E\varepsilon$.

$$-\sigma = \frac{m\ddot{x}}{F} = -\frac{kx}{F} = -E\varepsilon = -\frac{E}{x_0} x.$$

Тогда:

$$\frac{k}{F} = \frac{E}{X_0} = \frac{k}{x_0^2} = \frac{E}{x_0} \rightarrow k = Ex_0.$$

Таким образом модуль упругости определяет условие колебаний. Определим собственную частоту:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \text{ тогда } \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{Ex_0}{m}.$$

Собственная частота зависит прежде всего от упругости среды E , а также от массы среды m и конструкции x_0 (её жёсткость).

Выразим параметры через скорость звука и сжимаемость:

$$B = \frac{1}{\rho^2 a^2}.$$

Известно, что скорость звука

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ тогда } E = \rho a^2, \text{ а } B = \frac{1}{\rho \cdot a^2 \cdot \rho} = \frac{1}{\rho \cdot E}.$$

Определим коэффициент

$$k = Ex_0 = \frac{x_0}{\rho \cdot B}.$$

Теперь выразим собственную частоту через сжимаемость:

$$\omega_0^2 = \frac{Ex_0}{m} = \frac{x_0}{V\rho B} \sim \frac{x_0}{x_0^2 x_0} \frac{1}{\rho^2 B} = \frac{1}{\rho^2 B x_0^2}.$$

И ещё одно представление сжимаемости, это

$$B = \frac{1}{\rho^2 a^2} = \frac{1}{Z^2}, \text{ где } Z - \text{ удельный акустический импеданс.}$$

Акустический импеданс - это мера сопротивления среды прохождению звуковых волн.

Удельный акустический импеданс: $Z = \rho a$ - это плотность звука в среде.

Собственную частоту через акустический импеданс можно выразить:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho^2 B x_0^2} = \frac{\rho^2 a^2}{\rho^2 x_0^2} = \frac{Z^2}{\rho^2 x_0^2}; \quad \omega_0 = \frac{Z}{\rho x_0}.$$

Здесь x_0 - это характерный размер, может быть и длина волны λ . Или

$$\omega_0^2 = \frac{a^2}{x_0^2}; \quad \omega_0 = \frac{a}{x_0}.$$

Итак, собственная частота есть скорость звука, поделённая на характерный размер. Или

$$x_0 = \frac{a}{\omega_0} \left(\lambda = \frac{a}{\omega_0} \right).$$

Таким образом необходимо понять, как меняется сжимаемость и сопряженные с ней параметры в зависимости от термодинамических условий.

И ещё одно важное применение понятия сжимаемости. Это выражение производной скорости по времени в уравнении движения для ламинарного течения:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{d\tau} = -\text{grad} \left(\rho + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{d\rho}{d\tau} \right).$$

В отличие от уравнения Эйлера последнее отличается вязкоупругим членом. Преобразуем его. Переходя к производной от давления, получаем:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{d\tau} = -\text{grad} \left(\rho + \frac{4}{3} \frac{\mu\rho}{\rho^2 a^2} \frac{d\rho}{d\tau} \right).$$

Или

$$\rho \frac{d\vec{V}}{d\tau} = -\text{grad}\left(\rho + \frac{4}{3} \mu V \rho \frac{d\rho}{d\tau}\right).$$

В последнем уравнении произведение μV является знаковым. Именно оно является индикатором отличия от гамильтоновских идеальных систем. Это - вязкоупругая константа. Это уникальное свойство реальной среды, определяющее нелинейно-диссипативные процессы.

Численное исследование сжимаемости продуктов сгорания

Для понимания взаимосвязи ведущих параметров процесса с характеристикой несжимаемости на примере жидкостного ракетного двигателя РД-171 в многоцелевом программном комплексе Астра.4/р рассмотрим результаты термодинамических расчетов. Исходные данные:

Параметр	Значение
Давление в КС, МПа	24,5
Давление в выходном сечении сопла, МПа	0,072
Диаметр минимального сечения сопла, мм	235,5
Горючее	Керосин С12,3 Н23,9
Энтальпия образования горючего, кДж/кг	-1810
Окислитель	Кислород O ₂
Энтальпия образования окислителя, кДж/кг	0
Коэффициент избытка окислителя	1,6

Результаты расчетов представлены на рис. 1-6 в зависимости от степени расширения сопла, числа Маха и показателя адиабаты.

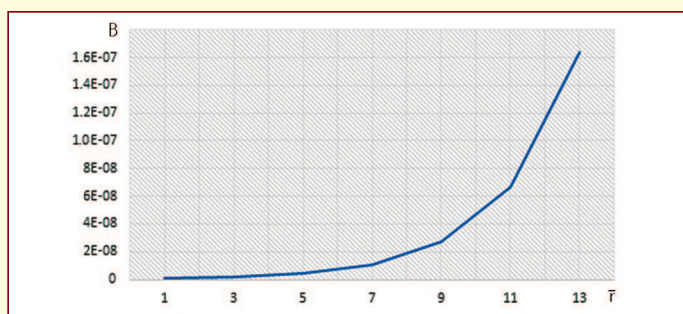


Рис. 1 Расчетная зависимость сжимаемости от степени расширения

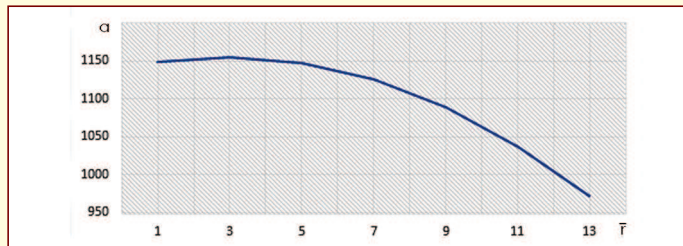


Рис. 2 Расчетная зависимость скорости звука от степени расширения

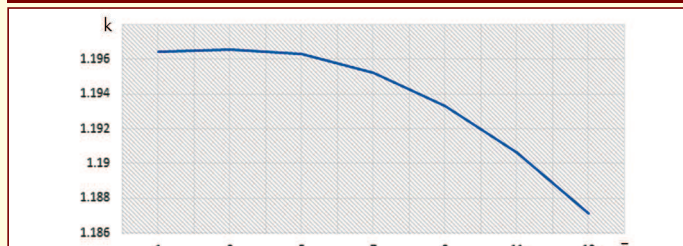


Рис. 3 Расчетная зависимость показателя адиабаты от степени расширения

В результате расчетов было выяснено, что сжимаемость увеличивается при увеличении степени расширения сопла. Другие величины, такие как, скорость звука и показатель адиабаты уменьшаются. Также, был посчитан критерий (комплекс), определяющий вязкоупругие свойства потока и построены графики, в результате которых видно, что он так же зависит от числа Маха и показателя адиабаты и в зависимости от их изменения меняется сам.

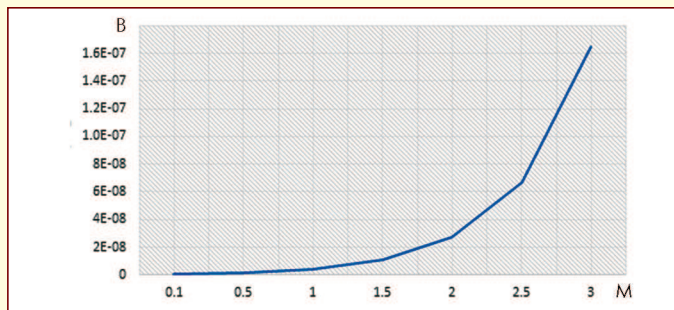


Рис. 4 Расчетная зависимость сжимаемости от числа Маха

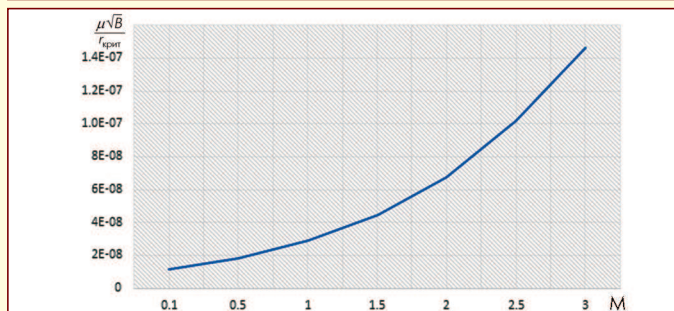


Рис. 5 Расчетная зависимость вязкоупругого критерия от числа Маха

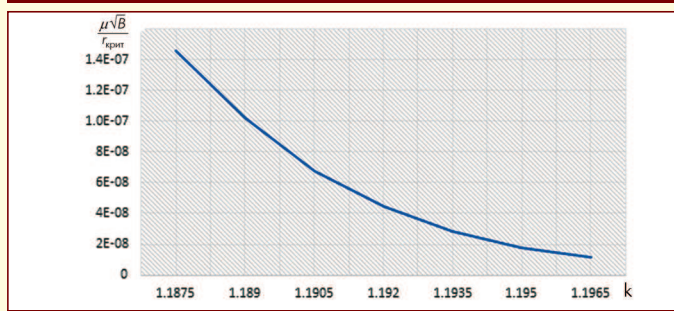


Рис. 6 Расчетная зависимость вязкоупругого критерия от показателя адиабаты

В результате проведенных расчетов можно сделать следующие выводы: сжимаемость может характеризовать различные явления и зависеть от многих параметров, выражая через неё различные характеристики можно получать полезные зависимости. Сжимаемость - основное свойство сверхзвукового потока и на основании рис. 4 можно видеть, что с увеличением числа Маха сжимаемость потока растёт. Сопоставляя рис. 4 и рис. 5 можно видеть, что с увеличением сжимаемости, критерий (комплекс), определяющий вязкоупругие свойства потока так же увеличивается.

Литература

1. В.В Сычев. Дифференциальные уравнения термодинамики // М. Наука, 1981 г.
2. В.А. Кириллин, В.В. Сычев, А.Е. Шейндлин. Техническая термодинамика // М. Энергоатомиздат, 1983 г.
3. Дж. Серрин. Математические основы классической механики жидкости // М. изд. Иностранной литературы, 1963 г.
4. Н.В. Иноземцев. Основы термодинамики и кинетики химических реакций // М. изд. Военной Академии механизации и моторизации Красной армии им. И.В. Сталина, 1940 г.
5. Н.Ю. Кочетков. Разработка и верификация метода и программы расчета внутривальностных характеристик двигателей твердого топлива с двухсоставными зарядами для перспективных летательных аппаратов // Космонавтика и ракетостроение № 1, 2010 г.
6. А.А. Сперанский, К.Л. Захаров, Д.В. Малютин. Фундаментальный подход к реконструкции механических полей для оценки эксплуатационных свойств изделий оборонпрома // Двигатель, № 1-2-3, 2009 г.
7. А.А. Сперанский, А.А. Михеев, Г.Г. Михайлов. Интеграция опережающих междисциплинарных знаний в качестве универсальной системообразующей основы перспективных межвидовых исследований // Двигатель, № 4, 2015 г.
8. А.А. Сперанский. Многомерные векторно-фазовые аттракторы гомеостаза состояний упругих систем // Двигатель, № 3, 2017 г.

Связь с авторами: kolabuy@gmail.com