

# ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ СКОРОСТЕЙ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ НА СРЕЗЕ СОПЛА

ФГБОУ ВО "Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)" (МАИ):

**Юрий Михайлович Кочетков**, д.т.н., профессор  
**Николай Юрьевич Кочетков**, к.т.н., старший преподаватель

*Турбулентность в сверхзвуковом потоке отсутствует и даже добавление в поток твердых частиц не приводит к ее возникновению. Ламинарное течение формирует осевую скорость на срезе сопла, а значит и удельный импульс тяги. От количества добавленных в топливо высокоэнергетических металлических частиц зависит величина удельного импульса, но лишняя добавка металла снижает его величину. Существует оптимальное значение, которое лимитирует возникающие потери на двухфазность.*

*There is no turbulence in the supersonic flow, and even the addition of solid particles to the flow does not lead to its occurrence. The laminar flow forms the axial velocity at the nozzle section, and hence the specific thrust impulse. The amount of high-energy metal particles added to the fuel depends on the value of the specific impulse, but an extra addition of metal reduces its value. There is an optimal value that limits the resulting two-phase losses.*

**Ключевые слова:** турбулентность, двухфазность, удельный импульс тяги.

**Keywords:** turbulence, two-phase, specific thrust impulse.

Развитие ракетной техники имеет устойчивую тенденцию на повышение энерго-массовых характеристик, что означает стремление к увеличению удельного импульса тяги, полезной нагрузки и уменьшению веса конструкции. Наиболее эффективным способом достижения высоких значений  $I_{уд} \equiv W_a$  является добавление в топливо высокоэнергетических металлических присадок в виде их порошка. Такой способ наиболее распространен в РДТТ. Благодаря добавлению высококалорийного горючего металла Al (Be или др.) резко повышается температура продуктов сгорания (на  $\sim 1000$  К) [1]. Значит и удельный импульс тяги также резко возрастает на величину  $\Delta I_{уд}$ . Чем больше металла, тем больше  $I_{уд}$ , но при добавлении металла также увеличивается доля окисла  $Al_2O_3$  в продуктах сгорания. Это ведет к тому, что твердые (газообразного  $Al_2O_3$ , как доказано, не бывает) окислы в зависимости от процентной доли (%) металла так же вырастают по массе. Эти окислы в виде частиц нужно выталкивать из потока. Импульс (энергия) тратится на их выталкивание, а не на расширение и полезную кинетическую энергию, приводящую к созданию движущей реактивной силы - тяги.

Экспериментально было установлено, что каждая частица в сверхзвуковом сопле - сферическая (это доказано) и равна 5 мкм [2]. Частица является причиной лобового сопротивления и снижения тяги. Сумма сопротивлений всех частиц - это и есть потеря тяги из-за двухфазности, а потеря тяги, отнесенная к общему расходу - это потеря удельного импульса тяги.

Расчетным путем и экспериментальными исследованиями на натурных двигателях (РДТТ) было показано, что потери удельного импульса тяги на, так называемую двухфазность, составляют величину  $\sim 5...6\%$  [3].

В РДТТ в общем-то на близком по свойствам параметрах примерно установлена "процентовка - разблюдовка" всех относительных потерь удельного импульса тяги. Более того в РДТТ бытует субъективный метод, называемый раскладкой потерь. Это, конечно всё делается от безысходности, от невозможности понятного адекватного описания процесса, но это необходимо. Другого способа определения потерь пока нет. Тем не менее так считают в отрасли. Так договорились. Так "устаканилось" и принято, что [4]:

- потери на трение составляют величину  $\sim 1,0...1,5\%$  и зависят от вязкости  $\mu$ ;
- потери на рассеивание  $\sim 2...3\%$  (зависят от угла раскрытия);
- потери на химическую неравновесность  $\sim 0,22...0,25\%$  (зависит от состава топлива);

- потери на двухфазность  $\sim 5...6\%$  от величины термодинамического удельного импульса тяги (зависят в основном от процентного содержания конденсированных частиц в продуктах сгорания  $z = G_{Al_2O_3}/G_\Sigma$  и собственно размера частиц  $dp$ ).

Существуют и другие потери. Всего потерь порядка десяти. Общие относительные потери  $I_{уд}$  находятся, как сумма  $\xi = \sum \xi_i$ , а абсолютные, как  $\Delta I_{уд} = I_{уд} \xi$ .

Определим потери из-за двухфазности, основываясь на известных соотношениях. Сопротивление тяги, которое оказывает  $i$ -я частица найдем из закона Ньютона. Оно пропорционально скоростному напору газообразной составляющей  $(\rho_r \Delta V^2)/2$ :

$$\Delta p_i = C_d \frac{\rho_r \Delta V^2}{2}$$

Далее, учитывая площадь миделя частиц  $F_{Al_2O_3i} = (\pi d_{pi}^2)/4$  (при  $d_{pi} = d_p = 5$  мкм), получаем  $F_{Al_2O_3i} = (\pi d_p^2)/4$ .

Все частицы  $N_p$ , которые загромождают данное проходное сечение, имеют площадь  $F_{Al_2O_3i} = N_p (\pi d_p^2)/4$ . Потери тяги от одной частицы запишутся:

$$\Delta P_i = C_d \frac{\rho_r \Delta V^2}{2} F_{Al_2O_3i} = C_d \frac{\rho_r \Delta V^2}{2} \frac{\pi d_p^2}{4}$$

тогда потери от всех частиц вместе составят:

$$\Delta P = \sum C_d \frac{\rho_r \Delta V^2}{2} \frac{\pi d_p^2}{4} = N_p C_d \frac{\rho_r \Delta V^2}{2} \frac{\pi d_p^2}{4}$$

Здесь  $\Delta V$  - разность скоростей частиц и газа  $\Delta V = V_r - V_p$ .

Частицы, отставая от потока, создают сопротивление. Величину отставания  $\Delta V$  сосчитать довольно сложно. Делается это с помощью методов и программ, разработанных для осесимметричных течений с применением уравнения Эйлера, Рейнольдса или Навье - Стокса. Чаще всего - уравнения Эйлера, поскольку это самое простое уравнение, а уравнение Навье - Стокса практически неподъемное в расчетном плане. Часто в расчетах принимают для простоты отставание величиной постоянной. Рассчитать величину  $N_p$  (количество частиц) - также проблематично.

В формулах, представленных в выкладках присутствуют два параметра:  $P$  - тяга и  $p$  - давление. Если поделим потери тяги на суммарный расход, то получим потери удельного импульса тяги в абсолютном виде:

$$\Delta I_{уд} = \frac{\Delta P}{G} = N_p C_d \frac{\rho_r \Delta V^2}{2} \frac{\pi d_p^2}{4} \frac{1}{G}$$

Здесь величина  $C_d$  - коэффициент лобового сопротивления. Для малых относительных скоростей, а они являются таковыми,  $C_d$  записывают для ламинарного режима. Так как скорости малы, то числа Рейнольдса также не велики и справедлива формула:

$$C_d = \frac{24}{Re_{dp}}, \text{ где } Re = \frac{\Delta V \rho_r d_p}{\mu_r}.$$

Подставляем его в основное уравнение и "умножаем - делим" на плотность материала частиц и время. Итак:

$$\Delta I_{уд} = N_p \frac{24 \mu_r}{\Delta V \rho_r d_p} \frac{\rho_r \Delta V \Delta V}{2} \frac{\pi d_p^2}{4} \frac{1}{G} \frac{1}{\rho_p} \frac{\tau}{\tau} \frac{2}{3} \frac{3}{2} \frac{d_p}{d_p}.$$

Комбинируя дроби, и выделяя нужные члены, получаем:

$$G_p = N_p \frac{\pi d_p^2}{6} \frac{1}{\rho_p} \frac{1}{\tau}.$$

Тогда

$$\Delta I_{уд} = G_p \frac{18 \mu_r}{G} \frac{\Delta V}{d_p^2} \frac{\tau}{\rho_p} = z \frac{18 \mu_r}{d_p^2 \rho_p} \Delta V \tau.$$

Проверим размерность

$$\left[ \frac{\mu_r}{\rho_p} \right] = \frac{M^2}{C}; \left[ \frac{1}{d_p^2} \right] = \frac{1}{M^2}; [\Delta V] = \frac{M}{C}; [\tau] = C; \frac{M^2}{C} \frac{M}{M^2 C} C = \frac{M}{C} = [I_{уд}].$$

Здесь был введен параметр  $z = G_p/G$ ,

$\tau$  - время работы двигателя,

$$\frac{1}{\tau_{рел}} = \frac{18 \mu_r}{\rho_p d_p^2};$$

$\tau_{рел}$  - время релаксации частицы в газе.

Отношение времен является критерием Стокса:  $Stk = \tau/\tau_{рел}$ , то есть отношение характерного времени процесса, ко времени релаксации. Тогда  $\Delta I_{уд} = z \cdot Stk \cdot \Delta V$ .

То, что останется от термодинамического удельного импульса после учета потерь будет иметь вид:

$$I_{уд \text{ реал}} = I_{уд \text{ ТД}} - \Delta I_{уд} \text{ или } \varphi = \frac{\Delta I_{уд}}{I_{уд \text{ ТД}}} = \frac{I_{уд \text{ ТД}} - I_{уд \text{ реал}}}{I_{уд \text{ ТД}}} = 1 - \xi.$$

Самый большой удельный импульс тяги благодаря добавке металла будет достигнут тогда, когда  $I_{уд \text{ ТД}}$  будет полностью реализован, то есть при  $z = 1$ . Это значит, что процент добавки металла будет 100. Но тогда и все потери станут равны достигнутому удельному импульсу тяги.

Получается, что все зависит от  $z$ .

- импульс растет, если процент металла в топливе растет;
- потери растут также, если  $z$  увеличивается.

Существует оптимальное соотношение для  $z$ . Как его найти? Необходимо найти прежде всего величину отставания.

Будем считать, что эта величина консервативная. Часто многие известные специалисты эту задачу считают при условии постоянного отставания, а это значит, что относительная безразмерная величина  $\Delta V/I_{уд \text{ ТД}} = \text{const}$ .

Сделаем первое приближение и найдем её для конкретного случая работы РДТТ первой ступени. В соответствии со статистикой натурных испытаний имеем уровни интересующих нас параметров. Для времени работы 63 с, металлизированного топлива с величиной  $z = 0,32$  (доля конденсированных частиц окиси алюминия) и размером частиц 5 мкм экспериментальные потери удельного импульса тяги составляют 5,5 % = 0,055.

Запишем основное соотношение для величины  $\xi = 0,055$ :

$$\frac{\Delta I_{уд}}{I_{уд \text{ ТД}}} = z \cdot Stk \cdot \frac{\Delta V}{I_{уд \text{ ТД}}} = 0,055.$$

Тогда получим:

$$\frac{\Delta V}{I_{уд \text{ ТД}}} = 0,055 \frac{1}{z \cdot Stk}.$$

Подставляем характерные значения для конкретного состава

твердого топлива:

$$\tau_{рел} = \frac{\rho_p d_p^2}{18 \mu_r} = \frac{400 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 10^{-4}} = \frac{100}{18} \cdot 10^{-5}.$$

Тогда

$$\frac{\tau}{\tau_{рел}} = Stk = \frac{63 \cdot 18}{100 \cdot 10^{-5}} = 1,134 \cdot 10^5.$$

Экспериментально пересчитанное относительное отставание запишется:

$$\frac{\Delta V}{I_{уд \text{ ТД}}} = 0,055 \frac{1}{0,32 \cdot 1,134 \cdot 10^6} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{3,2 \cdot 10^5} = 1,51565 \cdot 10^{-7}.$$

Формула для потерь приобретает вид:

$$\xi = \frac{\Delta I_{уд}}{I_{уд \text{ ТД}}} \approx z \cdot Stk \cdot 1,51565 \cdot 10^{-7} = z \cdot 1,134 \cdot 10^6 \cdot 1,51565 \cdot 10^{-7} = 0,17187471 \cdot z,$$

и, если  $I_{уд \text{ ТД}}$  (%Me) и  $z$  (%Me), то в итоге получаем зависимость от процентного содержания металла в топливе:

$$I_{уд \text{ реал}} = I_{уд \text{ ТД}} (1 - 0,17187471 \cdot z).$$

Реальный удельный импульс тяги  $I_{уд \text{ реал}}$  имеет максимум в зависимости от процентного содержания металла (%Me). Мы получили коэффициент  $K = 0,17187471$  при  $z = 0,32$  и при условии, что  $\Delta V$  есть величина постоянная. На самом деле она переменная, а  $\Delta V$  есть лишь локальное значение общей зависимости, но мы не знаем какая. Мы знаем, что при заданных условиях для РДТТ с этой величиной реализуются потери  $\xi = 0,055$ . Известно так же следующее:

- При  $z = 0$  будет чистый газ и прироста за счёт добавок металла не будет. В этой ситуации  $I_{уд \text{ реал}} = I_{уд \text{ ТД}}$ .

- При 100 % содержании в топливе металла, когда  $z = 1$ , будет самый большой импульс, но зато абсолютно все продукты сгорания будут сконденсированы, то есть газовой составляющей не будет и импульса тоже не будет  $I_{уд \text{ реал}} = I_{уд \text{ ТД}} - \Delta I_{уд} = 0$ .

Очевидно, что коэффициент  $K$  при  $z$ , сам зависит от  $z$ , но так, что при  $z = 0$  он - ноль, а при  $z = 1$  он - единица.

Для нахождения этого коэффициента воспользуемся универсальной функцией нормального насыщения (рис. 1 [5]).

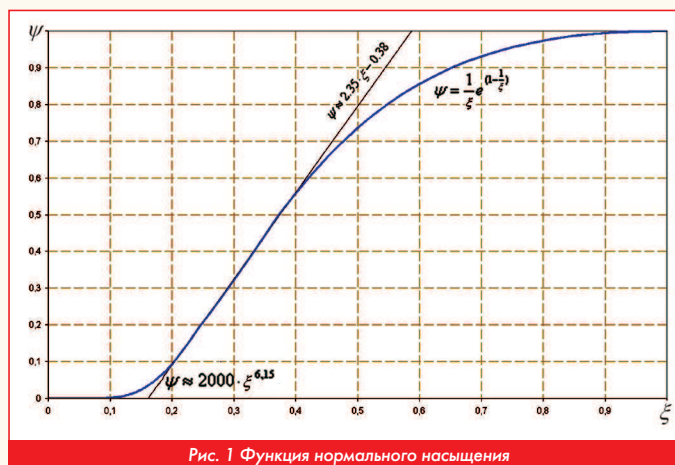


Рис. 1 Функция нормального насыщения

Использование функции  $\psi(\xi)$ , в нашем случае  $\psi(z)$  является логичным, поскольку эта функция осуществляет переход от одного равновесного состояния к другому. Это функция нормального насыщения

$$\psi(z) = \frac{1}{z} e^{\left(1 - \frac{1}{z}\right)},$$

и она имеет значение ноль, при  $z = 0$  и единицу, при  $z = 1$ . Функция - универсальная и годится для многих релаксационных процессов. В связи с чем становится логичным и обоснованным плавный переход из одной ситуации ( $z = 0$ ) к другой ( $z = 1$ ).

Проверим, попадаем ли мы в нужное значение коэффициента  $K$ , соответствующего значению потерь 0,055. Делая прямую

подстановку в формулу  $(1 - K \cdot z) = 1 - \psi(z)z$ , получаем отрицательный ответ. Подстановка точных значений параметров экспериментов позволяет определить значение коэффициента  $K = 1,736$ . Прямая подстановка  $z = 0,32$  в формулу дает значение в два раза больше желаемой величины. Для организации соответствия требуется коэффициент уменьшить в два раза или заменить зависимость от  $z$ . Будем искать эту зависимость в виде степенной функции  $z^n$ :

$$\xi = (1 - K \cdot z) = 1 - \psi(z)z^n.$$

Теперь все встало на свои места. Незначительное отставание частиц и формы кривой перехода от условий  $z = 0$  и  $z = 1$ , мы заменили нормальной функцией насыщения пси от зет. Теперь, если определить потери удельного импульса тяги в зависимости от величины  $z = 0,32$ , получим  $\xi = 5,5\%$ . Это соответствует уровню практических потерь для условий РДТТ. Пересчет значений показывает, что в данном случае степень  $n = 1,68$ .

Итак, обобщая формулу для нахождения максимума удельного импульса тяги на условия ЖРД, для топлив с частицами, можно пользоваться следующей зависимостью:

$$I_{уд \text{ реал}} = I_{уд \text{ ТД}} (1 - \psi(z)z^{1,68}),$$

где  $I_{уд \text{ ТД}} = f(\%Me)$ ,  $z = f(\%Me)$ .

Теперь определим, как зависит повышенный из-за  $k$ -фазы удельный импульс тяги от значения  $z = z(\%Me)$ . Вначале найдем связь  $z$  и  $\%Me$ : её можно установить как отношение плотностей:

$$z = \frac{\rho_{Me}}{\rho_{MeO}} \cdot \%Me.$$

Например,

$$z_{Al_2O_3} = \frac{\rho_{Al_2O_3}}{\rho_{Al}} \cdot \%Al = \frac{4}{2,7} \cdot \%Al = 1,48148 \%Al.$$

Теперь получим зависимость для  $I_{уд \text{ ТД}}$ :

$$\frac{I_{уд \text{ ТД}} - I_{уд 0}}{I_{уд \text{ пр}} - I_{уд 0}} = \psi(z), \text{ тогда}$$

$$I_{уд \text{ ТД}} = I_{уд 0} + (I_{уд \text{ пр}} - I_{уд 0})\psi(z).$$

Здесь  $I_{уд \text{ пр}}$  - предельно высокий удельный импульс тяги, полученный из-за добавки присадок. Здесь  $z = 1$ ;

$I_{уд 0}$  - удельный импульс тяги при  $z = 0$ .

$$I_{уд \text{ ТД}} = I_{уд 0} \left( 1 + \frac{I_{уд \text{ пр}} - I_{уд 0}}{I_{уд 0}} \psi \right).$$

Для случая добавки бериллия в топливо со фтором и водородом отношение перед  $\psi$  примерно равны  $\gamma = 0,5$ . В последующем мы этим воспользуемся.

Итак упрощаем запись, вводя коэффициент пропорциональности  $\gamma$ :

$$I_{уд \text{ реал}} = I_{уд 0} (1 + \gamma\psi)(1 - \psi \cdot z^{1,68}).$$

При этом

$$\frac{I_{уд \text{ реал}}}{I_{уд 0}} = (1 + \gamma\psi - z^{1,68}\psi - \gamma z^{1,68}\psi^2).$$

Прежде чем дифференцировать это уравнение, запишем:

$$(z^{1,68})' = 1,68 \frac{z^{0,68}}{z}; \psi' = \psi \left( \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} \right); \psi = \psi' \frac{z^2}{1-z}.$$

Тогда возьмем производную:

$$\begin{aligned} & (1 + \gamma\psi - z^{1,68}\psi - \gamma z^{1,68}\psi^2)' = \\ & = \gamma\psi' - (z^{1,68})'\psi - z^{1,68}\psi' - \gamma(z^{1,68})'\psi^2 - \gamma z^{1,68} \cdot 2\psi\psi' = \\ & = \gamma\psi' - 1,68 \frac{z^{0,68}}{z} \psi' - z^{1,68}\psi' - \gamma \cdot 1,68 \frac{z^{0,68}}{z} \psi\psi' - \gamma z^{1,68} \cdot 2\psi\psi' = \\ & = \psi' z^{1,68} \left[ \frac{\gamma}{z^{1,68}} - 1,68 \frac{z}{1-z} - 1 - 1,68\gamma\psi \frac{z}{1-z} - 2\gamma\psi \right] = 0. \end{aligned}$$

Далее преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{\gamma}{z^{1,68}} - 1,68 \frac{z}{1-z} - 1 = \psi \left( 1,68 \frac{z}{1-z} - 2\gamma \right).$$

Выделим  $\psi$  для решения неявного уравнения

$$\psi = \frac{\frac{\gamma}{z^{1,68}} - 1,68 \frac{z}{1-z} - 1}{1,68\gamma \frac{z}{1-z} - 2\gamma} = \frac{(1-z) \frac{\gamma}{z^{1,68}} - 1,68z - 1 + z}{1,68\gamma z - 2\gamma + 2\gamma z} = \frac{(1-z) \frac{\gamma}{z^{1,68}} - 0,68z - 1}{3,68\gamma z - 2\gamma}.$$

Решение этого уравнения при  $\gamma = 0,5$  дает  $z_{opt} = 0,432$ . Внутри этой координаты реализуется самый большой удельный импульс тяги  $I_{уд \text{ реал}} = I_{уд \text{ макс}}$ . Содержание металла при этом составляет примерно 20%. □

### Литература

1. В.И. Феодосьев. Основы техники ракетного полета. М. Наука. 1979 г.
2. А.М. Губертов, В.В. Миронов, Ю.М. Кочетков и др. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетном двигателе твёрдого топлива. -Машиностроение, 2004 г.
3. И. Тимнат. Ракетные двигатели на химическом топливе. -Изд. Мир. 1990 г.
4. В.Е. Алемасов, А.Ф. Дрегаллин, А.П. Тишин. Теория ракетных двигателей. -М. Машиностроение, 1990 г.
5. Ю.М. Кочетков, Н.Ю. Кочетков. Турбулентность. Математический анализ релаксационных процессов // Двигатель, № 3, 2020 г.

Связь с авторами: [swgeorgy@gmail.com](mailto:swgeorgy@gmail.com)

### P.S.

Многие отечественные ученые посвятили свое творчество проблемам оптимизации течений в сверхзвуковых соплах ракетных двигателей. Благодаря им во многом решена проблема прогнозирования газодинамических полей, проблема профилирования проточных участков различных сложных каналов, проблема энергомассовых характеристик. Среди наиболее ярких ученых, показавших оригинальные решения в этом направлении, можно весьма заслуженно отметить Вячеслава Даниловича Курпатенкова - создателя точного и эффективного инженерного метода профилирования



В.Д. Курпатенков



А.А. Сергиенко

сверхзвуковых сопел и Александра Александровича Сергиенко - разработчика уникального дифференциального стенда для определения потерь удельного импульса тяги и оптимизации конструкций сопловых блоков. □

