УДК 511.17

БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛА

Развитие темы.
Предыдущие статьи в № 4, 6 - 2018 г. и № 1 - 2020 г.

Андрей Иванович Касьян, к.т.н., МФПУ "Синергия"

Рассматриваются свойства бесконечных чисел. Вводятся арифметические действия.
Properties of infinite numbers are considered. Arithmetic operations are introduced.
Ключевые слова: ***бесконечные числа, алгебра, вычислимость.***
Keywords: ***infinite numbers, algebra, computability.***

Известно, что множество всех чисел в интервале (0, 1) эквивалентно множеству всех чисел на числовой прямой. Соответствие можно установить, например, с помощью функции arctgx. Тогда числам неограниченной формы записи будут соответствовать числа в окрестности 1. Таких целых чисел неограниченной формы бесконечно много. В их записи встречаются бесконечные последовательности нулей. Очевидна законность арифметических действий с подобными числами. Заметим, что мы придерживаемся аксиоматики Пеано и учитываем аксиому Архимеда. Во множестве бесконечных чисел нельзя прямо образовать подгруппу, т.к. их разность может оказаться конечным числом. Что касается однозначности, то, например, натуральное число n, которое имеет запись в десятичной системе n = 1(0) или число n = 3(2) заданы однозначно (здесь скобки - специальный знак нумерации - указывает на бесконечно повторяющиеся цифры, например 2, пропущенных разрядов, т.е. период). При такой записи всегда можно назвать цифру в любом разряде. Возможно также приближение (как в обычных числах). Например, число 12846(123) можно приближенно задать 12846(0), где нуль в скобках обозначает бесконечную последовательность нулей. Можно даже сравнивать эти числа.

Арифметические действия над числами неограниченной формы записи иногда проводятся в математических кружках. Например, требуется сложить два числа ...001 и ...129. Здесь, как ранее, многоточие указывает на произвольное число цифр старших разрядов. Неотмеченных цифр в старших разрядах может быть бесконечно много. В данном случае нас интересуют цифры первого класса. Получаем в результате сложения число ...130. Здесь использованы школьные правила с переносом цифр в старшие разряды. Произвольные числа в неограниченной форме записи складывать (в явном виде) невозможно. Умножим n =...024 на m =...016. Получаем nm =...384. На этом месте можно было бы арифметику закончить, но мы продолжим. Будем далее исходить для примера из числа a =100...000, где многоточие указывает, как и ранее, на произвольное число нулей, стоящих в старших разрядах (а = 1(0)). Продолжаем пользоваться формой записи такого типа чисел, когда под периодом в скобках понимается бесконечное множество одних и тех же цифр. Сложение с обычной единицей даст: a +1 = 100...001. Мы можем сложить, например, a = 1(0) и b = 2(1) и получить $a + b$ = 3(1). Умножение: (a + 1)2 = 200...002. Деление: 200...002 : 2 = 100...001. Но деление с остатком мы рассмотрим позже. Здесь нужно отметить один момент. Вычтем из нашего числа a единицу. Получим a - 1 = 99...999. Выше говорилось о сравнении чисел. Числа не только связаны с количеством, но и упорядочены отношением "больше-меньше". В результате проведенного вычитания мы получили число (по виду записи), большее a. Для выполнения непротиворечивой операции сравнения двух чисел в этом случае следует написать полученную разность в виде *0*99...999. Где нуль в старшем разряде (курсивом) указывает на имевший место перенос. Тогда сравнивая поразрядно это число с a, получим a > 099...999 (10(0) > 09(9)). Умножим далее данное a на 10 и получим 1*0*0...000, где нуль курсивом указывает на перенос в одном разряде. Мы можем конструктивным способом возвести a в квадрат. Здесь удобнее использовать наши скобки для обозначения бесконечного периода. Тогда квадрат числа a будет a^2 = 1(0)0...000 или 1(0)(0). Два периода можно записать одним 1(0). Можем умножить, например, a = 2(0)27 на b = 3(0)34 и получить ab = 6(0)(0)918. Обозначение периода указывает на однозначное место цифры в разряде. Старшие разряды могут не влиять на младшие, поэтому и не заметны (линейность). В примере умножения ab нас могут интересовать лишь младшие разряды. Нелинейный случай может резко изменить ситуацию с имеющимися "алгоритмами". Можно привести пример известной abc-гипотезы. Мы должны согласиться, что эта гипотеза касается всех натуральных чисел, включая вышеперечисленные. Если радикал стоит в первой степени, то, несмотря на произведение любых чисел, имеем линейный случай, когда все объекты прозрачны. Задача легко решается. Но это для первой степени. Стоит показатель степени немного увеличить, то получаем нелинейный и чрезвычайно сложный объект, трудную арифметику. Старшие разряды, в том числе и бесконечные, начинают влиять на процессы необъяснимым образом. Отметим также, что парадигма категории видит мир не только как совокупность объектов, но и как совокупность связей между ними. В нашем рассказе о бесконечных числах, мы наметили связь натуральных с ординалами.

Рассмотрим числа вида a = 119(0)867 или b = 123(0)321, более того, можно рассмотреть числа вида c = 391(0)...(0)511, где многоточие указывает на произвольное число цифр в пропущенных разрядах, а скобки указывают на период в традиционном смысле (бесконечное множество нулей). Эти более сложные числа мы рассмотрим позднее. Так как мы рассматриваем те числа, у которых старшие разряды отделены от младших бесконечным периодом нулей, то число как бы разбивается на две "невзаимодействующие" части. Для краткости можно записывать рассматриваемые числа в виде пар, например, a = (867; 119) или кратко z = (x; y). Младшие разряды для удобства помещаем впереди. Очевидно, такого типа числа геометрически представляются точкой на плоскости или вектором. Введем для этих чисел операцию сложения (a; b) + (c; d) = ($a + c$; $b + d$) и умножения ($ac - bd$; $ad + bc$). Очевидно, операции коммутативны. Мы получили алгебраическую структуру - кольцо с единицей (1; 0). Если для числа (a; b), не равного нулю, ввести обратное число по формуле

$$(a/(aa + bb); -b/(aa + bb)),$$

то получим поле. Заметим, что в нашем поле произведение (0; 1)(0; 1) = (-1; 0). Вспомним, что мы перемножаем числа в неограниченной форме записи, т.е. умножаем 1(0) на 1(0), где (0) указывает на произвольное число нулей. Получаем минус 1. Этот результат иллюстрирует пример, когда преподаватель математического кружка показывает детям "фокус", соединяя в кольцо положительную и отрицательную полуоси числовой прямой. При данном подходе само число (0; 1) в математике записывается как i. Тем самым мы наметили связь наших чисел с комплексными числами. Но для корректности используем запись k = (0; 1). То есть алгебра над числами с образующей k. "Действительное" обычное (целое) число тогда запишется привычно 2 = (2; 0). Т.е. а = Re(a; b). "Мнимое" 2(0) = (0; 2). Впрочем, эти формы записи могут меняться. Можно записать 2 = (0; 2).

Интересен такой случай, когда взято, например, число а = 3(0)1(0)2, где нули в скобках обозначают бесконечный период. В этом числе старшие разряды имеют вид 3(0)1, а младшие - 2, т.е. получаем запись числа (2; 3(0)1) или (2; (1; 3)). Сложение такого типа чисел производится по правилу (a; (b; c)) + (d; (e; f)) = ($a + d$; ($b + e$; $c + f$)), т.е. 1(0)1(0)1 + 2(0)2(0)2 = 3(0)3(0)3. Результат однозначный. Умножение (a; (b; c))(d; (e; f))=(ad - ($be - cd$; $bf + ce$); ($ae + db$; $af + dc$)). Возможно и дальнейшее обобщение.

Далее, можно использовать тригонометрическую форму записи наших чисел: $z = r(\cos u; \sin u)$. Наконец, можно использовать формулу Эйлера $\exp\{uk\} = (\cos u; \sin u)$. Если трактовать экспоненту как фазу, то можно показать, что умножение на фазу не отражается на общей картине. На этом подходе основан принцип работы квантового компьютера, когда алгоритм распараллеливается на множество процессов. Результат на выходе получается как интерференция результатов параллельных вычислений.

Здесь нужно сделать замечание. При вычислении обратного, например, числа (1; 1), получим (0,5; -0,5), в котором присутствует (опять) знак минус и стоит запятая. Мы встретились с "дробями". Но вспоминаем про бесконечность наших чисел. (Обратное к бесконечно большому будет бесконечно малая). Так как в этой записи обратного числа появилась запятая, то мы будем трактовать её как вычислительный оператор. Нам приятна запись без запятой (5; -5). На запятую действуем оператором штрих. Знак минус можно оставить. Для вычисленного обратного (0,5; -0,5), а также в других аналогичных случаях, поступаем подобным образом. Считаем знак "минус" симметричным для + и учитываем его при осуществлении указанных выше операций, т.е. при конкретных арифметических вычислениях. Это же соглашение распространяется на запятую. Считаем запятую, как нульмерную операцию. Интересно, что число 1(0)1 может оказаться простым, а среди чисел неограниченной формы могут оказаться простые. Если мы будем утверждать, что простые числа имеют только конечную форму записи, то тем самым мы утверждаем их конечное множество. Число (1; 1) не разложимо (простое гауссово число). Числа (1; 1) и (1; -1) ассоциированы. Число 2 раскладывается на их произведение 2 = (1; 1)(1; -1).

Сделаем также еще одно замечание. В физике часто рассматриваются расходящиеся ряды или подобные суммы, результат суммирования которых стремится к бесконечности. Но если у такого ряда взять сумму нескольких первых членов, то получается удовлетворительный и объяснимый результат. Бесконечность просто "не учитывается". Этот факт можно интерпретировать следующим образом. В задаче получаются бесконечные числа, к которым потом применяется операция Re. И еще одно замечание. В учебниках пишут, что физические поля должны убывать на бесконечности. Это не есть экспериментальный факт, а умозрительное утверждение. Можно предположить, что на Re физические поля (например, гравитационное) могут стабилизироваться, а на Im убывают.

(*Продолжение следует.*)

Литература

1. Г. Биркгоф, Т. Барти. Современная прикладная алгебра. М.: Мир, 1976 г.
2. А. Касьян. Бесконечные числа // Двигатель № 1, 2020 г.

Связь с автором: a.kasyan1@yandex.ru