

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

ФГБОУ ВО "Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)" (МАИ):

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н., профессор
Николай Юрьевич Кочетков, к.т.н., старший преподаватель

Проведен всесторонний математический анализ функции нормального насыщения (закон пси от кси). На примерах показана её универсальность. Установлены линейные интервалы этой функции, позволяющие проводить надёжный прогноз релаксационных процессов в различных научных направлениях (физики, химии, техники, медицине и пр.). Разработан метод поиска линейных областей функции на нелинейных участках путем перехода к её высоко-дифференциальным производным, позволяющим делать более глубокий анализ процесса. Разработан простой, доступный в практике вычислений способ нахождения сверхвысоких производных функции нормального насыщения. Установлены области на этой функции, отражающие основные физические релаксационные процессы (область скрытой индукции, область автомодельной релаксации и область программированного затухания).

Comprehensive mathematical analysis of the normal saturation function named psi-ksi relationship is carried out. Given examples show us its versatility. Linear intervals of this function are defined, what makes it possible to reliably forecast the relaxation processes in various scientific fields such as: physics, chemistry, engineering, medicine, etc.

A method is developed for finding linear regions of the function on nonlinear areas by switching to its higher order differential derivatives, that allows us to carry through more in-depth analysis of the process. A convenient method in calculation practice for finding ultrahigh derivatives of the normal saturation function, has been developed. The regions on this function that reflect the main physical relaxation processes (the region of latent induction, the region of self-similar relaxation and the region of programmed attenuation) are determined.

Ключевые слова: турбулентность, релаксация, насыщение, математический анализ.

Keywords: turbulence, relaxation, saturation, mathematical analysis.

В РДТТ для определения уносов углеродных материалов пользуются формулой В.И Бояринцева [1]. Эта формула позволяет определить величину окислительного коэффициента Ω по известным значениям температуры стенки:

$$\Omega = Vm \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{M_c}{M_{cm}} \Omega + 1\right)^2 + 4Vm\Omega} - \left(\frac{M_c}{M_{cm}} \Omega + 1\right)}{2Vm\Omega}$$

Здесь: Vm - окислительный потенциал;

M_c, M_{cm} - молекулярные массы углерода и смеси продуктов сгорания твердого топлива;

$$\Omega = \frac{\alpha}{C_p} \cdot \frac{RTw}{k_0 Pw M_c} \cdot e^{\frac{E}{RTw}};$$

$\frac{\alpha}{C_p}$ - коэффициент теплообмена;

k_0 - предэкспонент;

E - энергия активации.

Прямое решение этого уравнения неудобно в инженерных расчетах из-за необходимости очень точного задания температуры, поскольку экспоненциальный член, стоящий в функции $\Omega(Tw)$ делает данную зависимость очень крутой и очень небольшие отклонения от точных значений аргумента приводят к существенным ее отклонениям. Для упрощения расчетов исходное уравнение, полученное Бояринцевым

$$\Omega B^2 + \left(\Omega \frac{M_c}{M_{cm}} + 1\right) B - Vm = 0,$$

было преобразовано. Для этого [2] функция

$$\Omega = \frac{\alpha}{C_p} \cdot \frac{RTw}{k_0 Pw M_c} \cdot e^{\frac{E}{RTw}}$$

была представлена как обратная,

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{\alpha}{C_p} \cdot \frac{E}{k_0 Pw M_c} \cdot \frac{1}{\xi} e^{-\frac{1}{\xi}},$$

где $\xi = \frac{RTw}{E}$.

Произведение, зависящее от ξ было пронормировано домножением и одновременным делением правой части формулы на число $e = 2,718281828$:

$$\frac{1}{\Omega} = \frac{1}{\frac{\alpha}{C_p} \cdot \frac{E \cdot e}{k_0 Pw M_c}} \cdot \frac{1}{\xi} e^{1-\frac{1}{\xi}}.$$

Далее была введена новая функция [2]:

$$\Psi(X) = \frac{1}{\xi} e^{1-\frac{1}{\xi}} - \text{нормальная функция насыщения (рис. 1).}$$

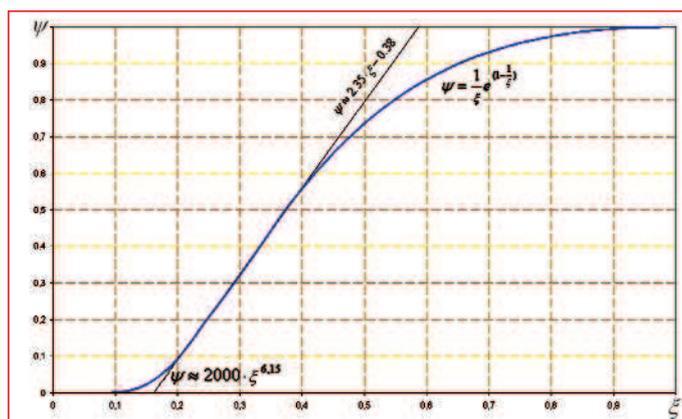


Рис. 1 Нормальная функция насыщения

Эта функция имеет значения равные нулю в нуле и единицу в единице. Кроме того, ее первые производные в этих точках равны нулю, а в точке $\xi = 1 - \sqrt{2}/2$ она имеет перегиб, что характеризует ее как функцию насыщения. Значения функции (Ψ) были затабулированы, что существенно упрощает расчеты, а с помощью самой функции появилась возможность дополнительных преобразований исходных уравнений. В дальнейшем функция нормального насыщения была использована во многих задачах термогазодинамики и физической химии. Внешне функция напо-

минает функцию распределения, например распределение частиц по размерам. Производная такой функции является плотностью распределения и играет большую роль в статистической физике и молекулярно-кинетической теории. Полученная функция универсальна и встречается в различных отраслях науки и техники [3]. В химии, например, это - кинетическая кривая процесса автокаталитической реакции. В физике - кривая намагничивания в петле гистерезиса. В теории регулирования - разгонная характеристика объекта регулирования. В технике это - эффективность пылесосадытельных камер, инерционных пылеуловителей, многокамерных прамоточных циклонов, скрубберов и т.д. Кривая может описывать процессы, происходящие в здравоохранении [4], а также предсказывать динамику протекания пандемии.

Вывод функции нормального насыщения

Вывод функции нормального насыщения производится с привлечением законов термодинамики и физической химии. Это - первое, второе [5] и четвертое [6] начало термодинамики. Это - закономерность, полученная В.И Боярцевым [1], при решении задачи механизма разрушения углеродной стенки под воздействием продуктов сгорания твердого топлива. Это - закон Аррениуса и закон действующих масс в форме Гиббса. Все соотношения, описывающие эти законы, математически строгие и поэтому универсальное соотношение, описывающее естественный закон нормального насыщения, полученный без упрощений и приближений, также математически строг и имеет статус закона.

Далее изложим последовательно вывод этого закона и получим его математическое соотношение. Этот вывод уже неоднократно делался и ранее [7, 8], но в целях общей систематизации изложения он повторяется, хотя и весьма кратко в целях удобства восприятия основной линии изложения и простоты понимания.

Итак, вывод соотношения будет тесно завязан на уравнениях термогазодинамики, а именно на уравнении движения, записанного для реального газа. Сразу следует повториться [9], что уравнение движения в форме Навье-Стокса справедливо только для замороженного газодинамического потока и применимо для благородных инертных газов [10, 11]. Новое уравнение движения выведем из начал термодинамики. Проведем это для нестационарных, вязких, сжимаемых и неравновесных уравнений движения.

Запишем 1-е и 2-е начало термодинамики с учетом внутренней и внешней энергии:

$$\text{grad}Q = \text{grad}U + P\text{grad}V + \text{grad}Q_{\text{внеш}} + \text{grad}Q_{\text{внутр.}}$$

Для удобства представим два правых члена в следующем виде:

$$R_{\mu}T\text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} + \frac{1}{\rho} \text{div}\Pi.$$

Здесь последний член - энергия касательных сил, записан в форме Коши.

Преобразуем второй член после равенства с помощью преобразования Лежандра и умножим все уравнения на ρ^2 получим:

$$\rho^2 \text{grad}Q = \rho^2 \text{grad}U + \rho^2 \text{grad}Q \frac{P}{\rho} - \rho^2 \text{grad}P + \rho^2 R_{\mu}T \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} + \rho \text{div}\Pi.$$

Вновь применив преобразование Лежандра для первого члена после равенства $\rho^2 \text{grad}U = \text{grad}U\rho^2 - U\text{grad}\rho^2$. Получим новое уравнение

$$\rho^2 \text{grad}Q - \text{grad}U\rho^2 - U\text{grad}\rho^2 + \rho \text{grad} \frac{P}{\rho} - \rho \text{grad}P + \rho^2 R_{\mu}T \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} + \rho \text{div}\Pi,$$

применив к которому четвертое начало термодинамики, получим:

$$\rho^2 \text{grad}Q = -\rho \frac{d\rho v}{dt} - U\text{grad}\rho^2 - \rho^2 \text{grad} \frac{P}{\rho} - \rho^2 R_{\mu}T \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} + \rho \text{div}\Pi.$$

Выводя энтальпию $H = U + P/\rho$ в уравнение τ

$$\rho \text{grad}Q = -\frac{d\rho v}{dt} - (U + H)\rho \text{grad}\rho + P \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} + \text{div}\Pi$$

и энтропию, получим:

$$\rho T \text{grad}S = -\frac{d\rho v}{dt} - \frac{k+1}{k-1} R_{\mu}T \text{grad}\rho + P \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} + \text{div}\Pi.$$

Далее приводим к традиционному виду уравнение импуль-

сов (движения), при этом выделяем оператор градиент от логарифма:

$$\frac{d\rho v}{dt} = \text{div}\Pi - P \text{grad} \ln \left(\frac{P^{k+1}}{(R_{\mu}T)^{k+1}} e^{-\left(\frac{Q_p - ST}{R_{\mu}T}\right)} \right).$$

Для дальнейших преобразований введем в выкладки химический потенциал, как удельный (в расчете на единицу молекулярной массы) изобарно-изотермический потенциал Гиббса. Для этого перейдем к универсальной газовой постоянной вместо молярной $R = \mu \cdot R_{\mu}$, тем самым переведем числитель в значение для моля, и сам числитель будет, по существу, химическим потенциалом. Часто в литературе последний член пишут в форме Аррениуса, тогда уравнение движения запишется следующим образом:

$$\frac{d\rho v}{dt} = \text{div}\Pi - \frac{k+1}{k-1} P \text{grad} \ln \left(\frac{P}{(R_{\mu}T)} e^{-\left(\frac{E}{(k-1)RT}\right)} \right).$$

Далее, выделяя функцию

$$\psi = \frac{1}{\xi} e^{1-\frac{1}{\xi}},$$

где аргументом обозначим

$$\xi = \left(\frac{T}{\frac{E}{(k-1)R}} \right),$$

получим окончательно уравнение в виде:

$$\frac{d\rho v}{dt} = \text{div}\Pi - \frac{k+1}{k-1} P \text{grad} \ln P \Psi(\xi).$$

Функция является универсальной функцией нормального насыщения. В работе [12] эта формулировка отражает закон пси от кси и в общем случае описывает релаксационные процессы.

Полученное уравнение преобразуем к виду:

$$\frac{d\rho v}{dt} = \text{div}\Pi - \frac{k+1}{k-1} P \text{grad} \ln P \Psi(\xi) = \text{div}\Pi - \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\Psi(\xi)} \text{grad} P \Psi(\xi).$$

Для ламинарного равновесного ($\psi(\xi) = 1$) течения уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho v}{dt} &= -2 \frac{k}{k-1} \text{grad}P - 4 \frac{v}{3} \text{grad} \frac{d\rho}{dt}; \\ \frac{d\rho v}{dt} &= -\text{grad} \left(2 \frac{k}{k-1} P - 4 \frac{v}{3} \frac{d\rho}{dt} \right). \end{aligned}$$

В случае замороженного течения ($\psi(\xi) = 0$) последнее уравнение превращается в уравнение Эйлера. Очевидно, что функция $\psi(\xi)$ определяет также кинетику химического процесса.

В нашем случае объектом исследования является именно эта функция. Поэтому изучим ее основные свойства в целях дальнейшего использования.

Главные свойства функции насыщения

Функцию насыщения или универсальный закон пси от кси проанализируем детально, рассматривая ее как математический объект. Итак, это монотонно возрастающая функция, и рассматриваем её мы только в интервале от нуля до единицы. Именно ноль и единица - это края интервала, которые символизируют изменения аргумента от 0 до 100 %. Функция в нуле имеет значение ноль, а в единице - единицу. Эта функция плавная и много- (бесконечно) дифференцируемая. Так как в общем она монотонная, то её можно было бы представить как функцию накопления через интеграл с переменным верхним пределом. В такой интерпретации она может иллюстрировать функцию распределения параметров. А её производная - плотность распределения.

Функция нормального насыщения - и как любая функция нормального насыщения - имеет свои характерные области. Интервал от нуля до ~0,1 практически равен нулю. В этот период происходят потенциальные процессы - процессы накопления. Этими процессами может быть возникновение или увеличение количества трещин перед началом уносов разрушающегося под воздействием двухфазного потока материала стенки. Или наполнение активных радикалов для последующих реакций в ка-

мере ЖРД. Или начальное уплотнение рабочего тела перед процессом перехода через звук в ударной волне и т.д. Этот интервал весьма продолжителен и ощутим для анализа. Это период индукции процесса, процесса наполнения потенциала. При превышении крайнего значения этого интервала, теперь уже на интервале [0,1; 0,2] происходит резкое возрастание кривой. В этот момент физические процессы наиболее высоко-градиентные. Происходит активный выход на равновесный режим, который характеризуется оптимальными скоростями реакций, фазовыми переходами и другими релаксационными процессами. Этот интервал плавно сопрягается с автомодельным процессом роста. Далее на интервале [0,2; 0,4] наступает линейный участок развития насыщения. На кривой (рис. 1), а это - характерный интервал, процесс идет с установившейся скоростью. Угол насыщения кривой на этом участке продолжительное время остается практически постоянным и примерно равен 67°. Это цифра (67°) для кривой $\psi(\xi)$ является основной характеристикой этой кривой. Максимальное значение угла наклона также находится в этом интервале, а точнее значение этого угла находится в точке перегиба и составляет $\theta = 68,33189^\circ$. На интервале [0,1; 0,4] закон $\psi(\xi)$ совершенно оправдано может быть представлен в виде линейной зависимости:

$$\psi = 2,35\xi - 0,38.$$

Замечаем еще один линейный участок на кривой плотности распределения (рис. 2).



Рис. 2 Первая производная нормальной функции насыщения

Это интервал $0,4 < \xi < 0,6$. Процесс скорости нарастания на этом интервале падает, а кривая при $\xi < 0,6$ плавно стремится к предельному значению, завершая свое движение в точке $\xi = 1$. После чего равновесие достигнуто. Все релаксационные процессы завершились. Кривая плавно из состояния одного равновесия перешла в другое.

Для более высокодифференцированного анализа проанализируем производную этой функции (плотность распределения). Производная будет иметь вид:

$$\psi'(\xi) - \left(\frac{1}{\xi} e^{-\frac{1}{\xi}}\right)' = \left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi}\right) \psi(\xi) = \frac{1-\xi}{\xi^2} \cdot \psi(\xi).$$

Кривая $\psi'(\xi)$ (рис. 2), характеризующая наклон кривой насыщения начинается и кончается в нуле. Она имеет максимальное значение. Кривая на интервале [0; 0,1] имеет очень вялый подъем с нулевой производной в точке $\xi = 0$, а спадает до нуля в точке $\xi = 1$ с конечной производной. В отличии от самой функции насыщения, у которой она нулевая. Очевидно, что кривая плотности распределения имеет две точки перегиба, которые могут более точно характеризовать процесс.

Вначале найдем от нее производную или, что тоже самое, вторую производную от функции насыщения:

$$\begin{aligned} \psi''(\xi) &= \left[-\left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{\xi}\right)'\right] \psi + \left[-\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}\right)\right] \psi' = \\ &= \left[\frac{1}{\xi^3} - \frac{2}{\xi^2}\right] \psi + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}\right)^2 \psi = \frac{\psi}{\xi^4} (2\xi^2 - 4\xi + 1) = 0. \end{aligned}$$

Как было сказано ранее, корни этого уравнения имеют вид $\xi_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}/2$.

Второй корень укладывается в интервал нашего рассмотрения $\xi = 1 - \sqrt{2}/2$. Этот корень является абсциссой максимального значения. Точное значение максимума наклона равно $68,33189^\circ$. Если присмотреться к этой кривой (рис. 2), то можно отметить, что в интервале [0,2; 0,4] значение угла наклона меняется слабо, в среднем составляет величину 67° . Далее представим кривую на рис. 2 как функцию угла наклона. На ней (рис. 3) более рельефно выделяются характерные области.



Рис. 3 Функция угла наклона плотности кривой насыщения

Следует подробно рассмотреть два интервала: 1) интервал от нуля до 0,08, период индукции и 2) интервал от 0,1 до 0,2. Это два интервала с автомодельным изменением параметров. В обоих случаях скорость нарастания изменит себя линейно. Это говорит о том, что:

1. Период индукции является автомодельным процессом.

2. На интервале [0,1; 0,2] процесс так же автомодельный, линейный и функция насыщения может быть описана параболой. Кривая насыщения в этом интервале будет изменяться по закону: $\psi = 2000 \xi^{6,35}$.

3. Интервал [0,6; 0,8] также имеет линейный участок. То есть кривая ψ' имеет постоянный отрицательный наклон. На этом участке реализуется классический экспоненциальный спад.

Нюансы, связанные с первым интервалом [0; 0,08] требуют серьезного физического анализа и возможно приведут к раскрытию внутреннего механизма протекания конкретного физического процесса. Значения производных в точках перегиба требует взятия третьей производной и приравнивания ее к нулю $\psi''' = 0$ для нахождения корней. Возьмем ее:

$$\begin{aligned} \psi''' &= \left[\psi \left(\frac{2}{\xi^2} - \frac{4}{\xi^3} + \frac{1}{\xi^4}\right)'\right]' = \left(\frac{2}{\xi^2} - \frac{4}{\xi^3} + \frac{1}{\xi^4}\right)' \cdot \psi + \left(\frac{2}{\xi^2} - \frac{4}{\xi^3} + \frac{1}{\xi^4}\right) \psi' = \\ &= \left(\frac{2 \cdot 2}{\xi^3} - \frac{4 \cdot 3}{\xi^4} + \frac{4}{\xi^5}\right) \psi + \left(\frac{2}{\xi^2} - \frac{4}{\xi^3} + \frac{1}{\xi^4}\right) \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}\right) \psi = \frac{-4\xi^2 + 12\xi - 4}{\xi^5} \psi + \\ &+ \frac{2\xi^2 - 4\xi + 1}{\xi^4} \cdot \frac{1-\xi}{\xi^2} \psi = \frac{-4\xi^3 + 12\xi^2 - 4\xi}{\xi^6} \psi + \frac{2\xi^2 - 4\xi + 1 - 2\xi^3 + 4\xi^2 - \xi}{\xi^6} \psi = \\ &= -\frac{\psi}{\xi^6} (6\xi^3 - 18\xi^2 + 9\xi - 1). \end{aligned}$$

Это уравнение имеет три действительных корня:

$$\xi_1 = 0,158983899;$$

$$\xi_2 = 0,435866521;$$

$$\xi_3 = 2,405149578,$$

при этом последний корень выпадает из интервала рассмотрения.

Отбирая первые два корня, поскольку они попадают в эту область, отмечаем, что кривая имеет две точки перегиба, в каждой из которых реализуется экстремальный рост, либо спад.

Возможность прогноза процесса насыщения

Разделение на характерные области кривой нормального насыщения позволяет делать серьезные прогнозы при изучении процессов насыщения или релаксации. Эта кривая характеризует именно свободную релаксацию при любых физических процессах. При этом можно предположить, и это логично, что энтропия процесса будет оставаться постоянной. В противоположность сказанному, вынужденное приведение к насыщению будет сопровождаться ростом энтропии.

В нормальной кривой насыщения все области взаимосвязаны. Достаточно в эксперименте или в результате мониторинга ситуации определить начало или конец какого-нибудь интервала, сразу представляется возможность узнать, когда начнет проявляться следующий процесс или когда процесс насыщения совсем завершится ($\xi = 1$). Действительно, если процесс насыщения достиг, например, линейного автоматического развития и известна координата его завершения, то отмеченный интервал (либо период) будет равен безразмерному отрезку 0,2 (0,4 - 0,2 = 0,2). Тогда становится понятным, когда насыщение закончится.

Самый ранний прогноз можно сделать по результатам исследования интервала [0; 0,1]. Но это будет самый не точный прогноз. Не всегда хорошо известно, когда процесс насыщения начинается. Малые значения производных на этом этапе не дают возможности точно предсказать, как поведет себя процесс на следующем интервале.

Более точный прогноз можно сделать по интервалу [0,2; 0,4]. Это - продолжительный линейный участок. Только на линейном участке человек может дать точный прогноз. Ведь ему известен, как правило, коэффициент пропорциональности, или его можно найти эмпирическим путем. А вот прогноз нелинейных процессов - это Божий промысел. Спрогнозировать нелинейный процесс, напрямую, человек не может. Но если найти связь между линейными участками процесса, то по отнормированной функции можно, применяя эти взаимосвязи, делать надежные прогнозы.

Определение высших производных функции насыщения

Примеры использования производных показали, что каждая из них может дать новую информацию и на других более высоко дифференцированных участках выявить линейные и увязать их с общими. В связи с этим является целесообразным изучение производных высоких порядков, тем более для универсальных функций. Это обретает новые перспективы в исследовании этих функций.

Далее определим четвертую производную:

$$\Psi^{IV} = \left[\Psi \left(\frac{1}{\xi^5} - \frac{9}{\xi^6} + \frac{18}{\xi^7} - \frac{6}{\xi^8} \right) \right]' = \left(\frac{1}{\xi^5} - \frac{9}{\xi^6} + \frac{18}{\xi^7} - \frac{6}{\xi^8} \right)' \Psi + \left(\frac{1}{\xi^5} - \frac{9}{\xi^6} + \frac{18}{\xi^7} - \frac{6}{\xi^8} \right) \cdot \Psi' =$$

$$= \left[-\frac{5}{\xi^6} + \frac{9 \cdot 6}{\xi^7} - \frac{18 \cdot 7}{\xi^8} + \frac{6 \cdot 8}{\xi^9} \right] \cdot \Psi + \left(\frac{1}{\xi^5} - \frac{9}{\xi^6} + \frac{18}{\xi^7} - \frac{6}{\xi^8} \right) \left(\frac{1-\xi}{\xi^2} \right) \Psi =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^6} [-6\xi + 45\xi^2 - 72\xi^3 + 18\xi^4 + (1 - 9\xi + 18\xi^2 - 6\xi^3)(1 - \xi)] =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^6} [-6\xi + 45\xi^2 - 72\xi^3 + 18\xi^4 + 1 - 9\xi + 18\xi^2 - 6\xi^3 - \xi + 9\xi^2 - 18\xi^3 + 6\xi^4] =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^6} (24\xi^4 - 96\xi^3 + 72\xi^2 - 16\xi + 1) = 0.$$

Корни уравнения в скобке имеют следующие значения.
 $\xi_1 = 0,10643879214266039$; $\xi_2 = 0,2204284102592151$;
 $\xi_3 = 0,5728160624821347$; $\xi_4 = 3,1003167351159897$.

В рассматриваемый диапазон попадают первые три решения.

Определим пятую производную:

$$\Psi^V = \left[\Psi \left(\frac{24}{\xi^4} - \frac{96}{\xi^5} + \frac{72}{\xi^6} - \frac{16}{\xi^7} + \frac{1}{\xi^8} \right) \right]' = \left(\frac{24}{\xi^4} - \frac{96}{\xi^5} + \frac{72}{\xi^6} - \frac{16}{\xi^7} + \frac{1}{\xi^8} \right)' \Psi +$$

$$+ \left(\frac{24}{\xi^4} - \frac{96}{\xi^5} + \frac{72}{\xi^6} - \frac{16}{\xi^7} + \frac{1}{\xi^8} \right) \Psi' = \left(-\frac{24 \cdot 4}{\xi^5} + \frac{96 \cdot 5}{\xi^6} - \frac{72 \cdot 6}{\xi^7} + \frac{16 \cdot 7}{\xi^8} - \frac{8}{\xi^9} \right) \Psi +$$

$$+ \left(\frac{24\xi^4 - 96\xi^3 + 72\xi^2 - 16\xi + 1}{\xi^8} \right) \left(\frac{1-\xi}{\xi^2} \right) \Psi = \frac{\Psi}{\xi^{10}} (-96\xi^5 + 480\xi^4 - 432\xi^3 + 112\xi^2 -$$

$$- 8\xi + 24\xi^4 - 96\xi^3 + 72\xi^2 - 16\xi + 1 - 24\xi^5 + 96\xi^4 - 72\xi^3 + 16\xi^2 - \xi) =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^{10}} (-120\xi^5 + 600\xi^4 - 600\xi^3 + 200\xi^2 - 25\xi + 1).$$

Для интервала [0; 1] попеременно четыре корня:

$\xi_1 = 0,07910890000124489$; $\xi_2 = 0,14112710000302825$;
 $\xi_3 = 0,27805380000696567$; $\xi_4 = 0,7075121999041226$.

Шестую производную вычислим, замечая некоторый повторяющийся механизм.

$$\Psi^{VI} = \left[\Psi \left(-\frac{120}{\xi^3} + \frac{600}{\xi^4} - \frac{600}{\xi^5} + \frac{200}{\xi^6} - \frac{25}{\xi^7} + \frac{1}{\xi^{10}} \right) \right]' = \left(-\frac{120}{\xi^3} + \frac{600}{\xi^4} - \frac{600}{\xi^5} + \frac{200}{\xi^6} - \frac{25}{\xi^7} + \frac{1}{\xi^{10}} \right)' \Psi +$$

$$+ \left(-\frac{120}{\xi^3} + \frac{600}{\xi^4} - \frac{600}{\xi^5} + \frac{200}{\xi^6} - \frac{25}{\xi^7} + \frac{1}{\xi^{10}} \right) \Psi' = \left(\frac{120 \cdot 3}{\xi^4} - \frac{600 \cdot 4}{\xi^5} + \frac{600 \cdot 5}{\xi^6} - \frac{200 \cdot 6}{\xi^7} + \frac{25 \cdot 7}{\xi^8} - \frac{1 \cdot 10}{\xi^{11}} \right) \Psi +$$

$$+ \left(-\frac{120}{\xi^3} + \frac{600}{\xi^4} - \frac{600}{\xi^5} + \frac{200}{\xi^6} - \frac{25}{\xi^7} + \frac{1}{\xi^{10}} \right) \left(\frac{1-\xi}{\xi^2} \right) \Psi = \frac{\Psi}{\xi^{13}} (600\xi^6 - 3600\xi^5 + 4200\xi^4 - 1600\xi^3 +$$

$$+ 225\xi^2 - 10\xi - 120\xi^5 + 600\xi^4 - 600\xi^3 + 200\xi^2 - 25\xi + 1 + 120\xi^6 - 600\xi^5 + 600\xi^4 -$$

$$- 200\xi^3 + 25\xi^2 - \xi) = \frac{\Psi}{\xi^{13}} (720\xi^6 - 4320\xi^5 + 5400\xi^4 - 2400\xi^3 + 450\xi^2 - 36\xi + 1).$$

Корни этого многочлена в интервале [0; 1]:

$\xi_1 = 0,06257$; $\xi_2 = 0,10165$; $\xi_3 = 0,17316$;
 $\xi_4 = 0,33414$; $\xi_5 = 0,84$.

При взятии производных был выработан пример использования только первой производной, через которую производится единственное дифференцирование трансцендентной функции. Далее выстраивается для каждого уровня дифференцирования своя многочлен, с соответственной степенью.

$$\Psi^{VII} = \left[\Psi \left(\frac{720}{\xi^6} - \frac{4320}{\xi^7} + \frac{5400}{\xi^8} - \frac{2400}{\xi^9} + \frac{450}{\xi^{10}} - \frac{36}{\xi^{11}} + \frac{1}{\xi^{12}} \right) \right]' = \left(\frac{720}{\xi^6} - \frac{4320}{\xi^7} + \frac{5400}{\xi^8} - \frac{2400}{\xi^9} + \frac{450}{\xi^{10}} - \frac{36}{\xi^{11}} + \frac{1}{\xi^{12}} \right)' \Psi +$$

$$+ \left(\frac{720}{\xi^6} - \frac{4320}{\xi^7} + \frac{5400}{\xi^8} - \frac{2400}{\xi^9} + \frac{450}{\xi^{10}} - \frac{36}{\xi^{11}} + \frac{1}{\xi^{12}} \right) \Psi' = \left(-\frac{720 \cdot 6}{\xi^7} + \frac{4320 \cdot 7}{\xi^8} - \frac{5400 \cdot 8}{\xi^9} + \frac{2400 \cdot 9}{\xi^{10}} - \frac{450 \cdot 10}{\xi^{11}} + \frac{36 \cdot 11}{\xi^{12}} - \frac{1 \cdot 12}{\xi^{13}} \right) \Psi +$$

$$+ \left(\frac{720}{\xi^6} - \frac{4320}{\xi^7} + \frac{5400}{\xi^8} - \frac{2400}{\xi^9} + \frac{450}{\xi^{10}} - \frac{36}{\xi^{11}} + \frac{1}{\xi^{12}} \right) \left(\frac{1-\xi}{\xi^2} \right) \Psi =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^{14}} (-4320\xi^7 + 30240\xi^6 - 43200\xi^5 + 21600\xi^4 - 4500\xi^3 + 396\xi^2 - 12\xi + 720\xi^6 - 4320\xi^5 + 5400\xi^4 -$$

$$- 2400\xi^3 + 450\xi^2 - 36\xi + 1 - 720\xi^7 + 4320\xi^6 - 5400\xi^5 + 2400\xi^4 - 450\xi^3 + 36\xi^2 - \xi) =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^{14}} (-5040\xi^7 + 35280\xi^6 - 52920\xi^5 + 29400\xi^4 - 7350\xi^3 + 882\xi^2 - 49\xi + 1).$$

Корни уравнения в интервале [0; 1] имеют вид:

$\xi_1 = 0,05156$; $\xi_2 = 0,07853$;
 $\xi_3 = 0,38943$; $\xi_4 = 0,97403$.

Нахождение корней предполагает возможность разложения многочлена на одночлены в целях нахождения повторяемости. Восемью производную найдем аналогично.

$$\Psi^{VIII} = \left[\Psi \left(-\frac{5040}{\xi^7} + \frac{35280}{\xi^8} - \frac{52920}{\xi^9} + \frac{29400}{\xi^{10}} - \frac{7350}{\xi^{11}} + \frac{882}{\xi^{12}} - \frac{49}{\xi^{13}} + \frac{1}{\xi^{14}} \right) \right]' =$$

$$= \left(-\frac{5040}{\xi^7} + \frac{35280}{\xi^8} - \frac{52920}{\xi^9} + \frac{29400}{\xi^{10}} - \frac{7350}{\xi^{11}} + \frac{882}{\xi^{12}} - \frac{49}{\xi^{13}} + \frac{1}{\xi^{14}} \right)' \Psi +$$

$$+ \left(-\frac{5040}{\xi^7} + \frac{35280}{\xi^8} - \frac{52920}{\xi^9} + \frac{29400}{\xi^{10}} - \frac{7350}{\xi^{11}} + \frac{882}{\xi^{12}} - \frac{49}{\xi^{13}} + \frac{1}{\xi^{14}} \right) \Psi' =$$

$$= \left(\frac{5040 \cdot 7}{\xi^8} - \frac{35280 \cdot 8}{\xi^9} + \frac{52920 \cdot 9}{\xi^{10}} - \frac{29400 \cdot 10}{\xi^{11}} + \frac{7350 \cdot 11}{\xi^{12}} - \frac{882 \cdot 12}{\xi^{13}} + \frac{49 \cdot 13}{\xi^{14}} - \frac{14}{\xi^{15}} \right) \Psi +$$

$$+ \left(-\frac{5040}{\xi^7} + \frac{35280}{\xi^8} - \frac{52920}{\xi^9} + \frac{29400}{\xi^{10}} - \frac{7350}{\xi^{11}} + \frac{882}{\xi^{12}} - \frac{49}{\xi^{13}} + \frac{1}{\xi^{14}} \right) \left(\frac{1-\xi}{\xi^2} \right) \Psi =$$

$$+ \left(\frac{52920}{\xi^8} - \frac{29400}{\xi^9} + \frac{7350}{\xi^{10}} - \frac{882}{\xi^{11}} + \frac{49}{\xi^{12}} - \frac{1}{\xi^{13}} \right) \frac{\Psi}{\xi^2} =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^{16}} (35280\xi^8 - 282240\xi^7 + 476280\xi^6 - 29400\xi^5 + 80850\xi^4 - 10584\xi^3 + 637\xi^2 -$$

$$- 14\xi - 5040\xi^7 + 35280\xi^6 - 52920\xi^5 + 29400\xi^4 - 7350\xi^3 + 882\xi^2 - 49\xi + 1 +$$

$$+ 5040\xi^8 - 35280\xi^7 + 52920\xi^6 - 29400\xi^5 + 7350\xi^4 - 882\xi^3 + 49\xi^2 - \xi) =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^{16}} (40320\xi^8 - 322560\xi^7 + 564480\xi^6 - 376320\xi^5 + 117600\xi^4 - 18816\xi^3 + 1568\xi^2 - 64\xi + 1).$$

Значение корней в интервале [0; 1]:

$\xi_1 = 0,04374$; $\xi_2 = 0,06353$;
 $\xi_3 = 0,09295$; $\xi_4 = 0,23437$;
 $\xi_5 = 0,44423$.

Значение корней - это реальные точки, которые позволяют более подробно описывать особенности кривых.

Далее найдем девятую производную.

$$\Psi^{IX} = \left[\Psi \left(\frac{40320}{\xi^8} - \frac{322560}{\xi^9} + \frac{564480}{\xi^{10}} - \frac{376320}{\xi^{11}} + \frac{117600}{\xi^{12}} - \frac{18816}{\xi^{13}} + \frac{1568}{\xi^{14}} - \frac{64}{\xi^{15}} + \frac{1}{\xi^{16}} \right) \right]' =$$

$$= \left(\frac{40320}{\xi^8} - \frac{322560}{\xi^9} + \frac{564480}{\xi^{10}} - \frac{376320}{\xi^{11}} + \frac{117600}{\xi^{12}} - \frac{18816}{\xi^{13}} + \frac{1568}{\xi^{14}} - \frac{64}{\xi^{15}} + \frac{1}{\xi^{16}} \right)' \Psi +$$

$$+ \left(\frac{40320}{\xi^8} - \frac{322560}{\xi^9} + \frac{564480}{\xi^{10}} - \frac{376320}{\xi^{11}} + \frac{117600}{\xi^{12}} - \frac{18816}{\xi^{13}} + \frac{1568}{\xi^{14}} - \frac{64}{\xi^{15}} + \frac{1}{\xi^{16}} \right) \left(\frac{1-\xi}{\xi^2} \right) \Psi =$$

$$= \left(\frac{40320 \cdot 8}{\xi^9} - \frac{322560 \cdot 9}{\xi^{10}} + \frac{564480 \cdot 10}{\xi^{11}} - \frac{376320 \cdot 11}{\xi^{12}} + \frac{117600 \cdot 12}{\xi^{13}} - \frac{18816 \cdot 13}{\xi^{14}} + \frac{1568 \cdot 14}{\xi^{15}} - \frac{64 \cdot 15}{\xi^{16}} + \frac{16}{\xi^{17}} \right) \Psi +$$

$$+ \left(\frac{40320}{\xi^8} - \frac{322560}{\xi^9} + \frac{564480}{\xi^{10}} - \frac{376320}{\xi^{11}} + \frac{117600}{\xi^{12}} - \frac{18816}{\xi^{13}} + \frac{1568}{\xi^{14}} - \frac{64}{\xi^{15}} + \frac{1}{\xi^{16}} \right) \left(\frac{1-\xi}{\xi^2} \right) \Psi =$$

$$+ \left(\frac{322560}{\xi^9} - \frac{564480}{\xi^{10}} + \frac{376320}{\xi^{11}} - \frac{117600}{\xi^{12}} + \frac{18816}{\xi^{13}} - \frac{1568}{\xi^{14}} + \frac{64}{\xi^{15}} - \frac{1}{\xi^{16}} \right) \frac{\Psi}{\xi^2} =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^{18}} (-322560\xi^9 + 2903040\xi^8 - 5644800\xi^7 + 4139520\xi^6 - 1411200\xi^5 + 244608\xi^4 - 21952\xi^3 +$$

$$+ 960\xi^2 - 16\xi + 40320\xi^8 - 322560\xi^7 + 564480\xi^6 - 376320\xi^5 + 117600\xi^4 - 18816\xi^3 + 1568\xi^2 -$$

$$- 64\xi + 1 - 40320\xi^9 + 322560\xi^8 - 564480\xi^7 + 376320\xi^6 - 117600\xi^5 + 18816\xi^4 - 1568\xi^3 + 64\xi^2 - \xi) =$$

$$= \frac{\Psi}{\xi^{18}} (-362880\xi^9 + 3265920\xi^8 - 6531840\xi^7 + 5080320\xi^6 - 1905120\xi^5 + 381024\xi^4 - 42336\xi^3 + 2592\xi^2 - 81\xi + 1).$$

Корни в диапазоне [0; 1]

$\xi_1 = 0,03792$; $\xi_2 = 0,05309$;
 $\xi_3 = 0,10669$; $\xi_4 = 0,49872$.

В процессе дифференцирования было установлено, что если коэффициент перед переменной поделить на постоянную величину, то все значения коэффициентов будут представлять квадраты целых чисел. Беря десятую производную, будем свертывать члены с этой тенденцией.

3) Производим умножение каждого коэффициента на свой факториал с чередующимся знаком " - " - "

$$\begin{aligned}
 &1 \\
 &1 \quad 1 \\
 &1 \quad -1 \cdot 2^2 \quad 2! \cdot 1^2 \\
 &1 \quad -1! \cdot 3^2 \quad 2! \cdot 3^2 \quad -3! \cdot 1^2 \\
 &1 \quad -1! \cdot 4^2 \quad 2! \cdot 6^2 \quad -3! \cdot 4^2 \quad 4! \cdot 1^2 \\
 &1 \quad -1! \cdot 5^2 \quad 2! \cdot 10^2 \quad -3! \cdot 10^2 \quad 4! \cdot 5^2 \quad 5! \cdot 1^2 \\
 &1 \quad -1! \cdot 6^2 \quad 2! \cdot 15^2 \quad -3! \cdot 20^2 \quad 4! \cdot 15^2 \quad -5! \cdot 6^2 \quad 6! \cdot 1^2 \\
 &1 \quad -1! \cdot 7^2 \quad 2! \cdot 21^2 \quad -3! \cdot 35^2 \quad 4! \cdot 35^2 \quad -5! \cdot 21^2 \quad 6! \cdot 7^2 \quad 7! \cdot 1^2 \\
 &1 \quad -1! \cdot 8^2 \quad 2! \cdot 28^2 \quad -3! \cdot 56^2 \quad 4! \cdot 70^2 \quad -5! \cdot 56^2 \quad 6! \cdot 28^2 \quad 7! \cdot 8^2 \quad 8! \cdot 1^2 \\
 &1 \quad -1! \cdot 9^2 \quad 2! \cdot 36^2 \quad -3! \cdot 84^2 \quad 4! \cdot 126^2 \quad 5! \cdot 126^2 \quad -6! \cdot 84^2 \quad -7! \cdot 36^2 \quad 8! \cdot 9^2 \quad -9! \cdot 1^2 \\
 &1 \quad -1! \cdot 10^2 \quad 2! \cdot 45^2 \quad -3! \cdot 120^2 \quad 4! \cdot 210^2 \quad -5! \cdot 252^2 \quad 6! \cdot 210^2 \quad -7! \cdot 120^2 \quad 8! \cdot 45^2 \quad -9! \cdot 10^2 \quad 10! \cdot 1
 \end{aligned}$$

Полученные значения в скобках являются коэффициентами многочленов.

Нахождение десятой производной функции нормального насыщения полученным методом

Выбираем соответствующую строку и вычисляем:
 $\psi^X = (\psi / \xi^{10}) \cdot (1 - 100\xi + 4050\xi^2 - 86400\xi^3 + 1058400\xi^4 - 7620480\xi^5 + 31752000\xi^6 - 72576000\xi^7 + 81648000\xi^8 - 36288000\xi^9 + 3628800\xi^{10})$.

Сравнение результатов с предыдущими значениями показывает полное их совпадение.

Значения факториалов: 1! = 1; 2! = 2; 3! = 6; 4! = 24; 5! = 120; 6! = 720; 7! = 5040; 8! = 40320; 9! = 362880; 10! = 3628800; 11! = 39916800; 12! = 479001600.

Расчет одиннадцатой и двенадцатой производной проводим по полученной формуле, а не напрямую:

$$\begin{aligned}
 (\psi^{XI} / \psi) \cdot \xi^{22} &= 1 - (1!) + (2! \cdot 55^2) \xi^2 - (3! \cdot 165^2) \xi^3 + (4! \cdot 330^2) \xi^4 - (5! \cdot 462^2) \xi^5 + (6! \cdot 462^2) \xi^6 - (7! \cdot 330^2) \xi^7 + (8! \cdot 165^2) \xi^8 - (9! \cdot 55^2) \xi^9 + \\
 &+ (10! \cdot 11^2) \xi^{10} - (11!) \xi^{11} = 1 - 121\xi + 6050\xi^2 - 163350\xi^3 + \\
 &+ 2613600\xi^4 - 25613280\xi^5 + 153679680\xi^6 - 548856000\xi^7 + \\
 &+ 1097712000\xi^8 - 1097712000\xi^9 + 439084800\xi^{10} - 39916800\xi^{11}; \\
 (\psi^{XII} / \psi) \cdot \xi^{24} &= 1 - (1! \cdot 12^2) + (2! \cdot 66^2) \xi^2 - (3! \cdot 220^2) \xi^3 + (4! \cdot 495^2) \xi^4 - \\
 &-(5! \cdot 792^2) \xi^5 + (6! \cdot 924^2) \xi^6 - (7! \cdot 792^2) \xi^7 + (8! \cdot 495^2) \xi^8 - (9! \cdot 220^2) \xi^9 + \\
 &+ (10! \cdot 66^2) \xi^{10} - (11! \cdot 12^2) \xi^{11} + (12!) \xi^{12} = 1 - 144\xi + 8712\xi^2 - \\
 &- 290400\xi^3 + 5880600\xi^4 - 75271680\xi^5 + 614718720\xi^6 - \\
 &- 3161410560\xi^7 + 9879408000\xi^8 - 17563392000\xi^9 + \\
 &+ 158070528000\xi^{10} - 48840119200\xi^{11} + 479001600\xi^{12}.
 \end{aligned}$$

Нахождение интеграла

Анализ данной функции был бы не полным, если не взять и не проанализировать интеграл от нормальной функции насыщения $\psi(\xi)$ в диапазоне интегрирования от 0 до 1.

$$I = \int_0^1 \Psi(\xi) d\xi = \int_0^1 \frac{1}{\xi} e^{1-\frac{1}{\xi}} d\xi.$$

Преобразуем этот интеграл, введя обозначение $z = 1/\xi$:

$$I = -e \int_{\infty}^1 \frac{e^{-z}}{z} dz = e \int_1^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz = e \cdot E_1(1).$$

Здесь $E_1(1) = 0,219383934...$ - интегральная показательная функция Эйлера, взятая при $z = 1$. Далее получим $I = 0,596347361... \approx 0,6$.

Заключение

На основании всестороннего теоретического анализа, проведенного в условиях изучения возможностей применения функции нормального насыщения в различных сферах деятельности человека (ракетная техника, энергетика, медицина и другие) можно сделать следующие выводы:

1. На базе известных законов физики, без каких-либо приближений и допущений, была получена зависимость, описывающая универсальный процесс любого естественного насыщения, которая приобретает так же статус закона.

2. Конкретизированы характерные области этой функции: область скрытого прохождения процесса насыщения, область линейного развития процесса и область монотонного его завершения.

3. Для различных отраслей народного хозяйства появляется возможность прогноза любой стадии процесса насыщения (релаксации), например:

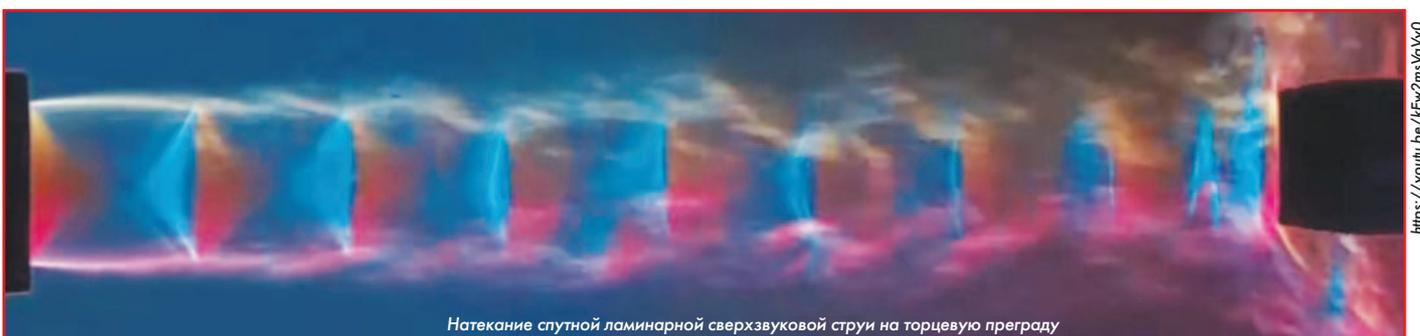
- в химии: время существования неравновесных процессов;
- в технике: период работоспособности (эффективности) очистных устройств (циклонов, скрубберов и т.д.);
- в медицине: характерные этапы пандемии.

4. Применение закона насыщения позволит получить новые возможности анализа неизвестных процессов и неосвоенных технологий (определить правые части в уравнении Больцмана, установить технологический режимы при изготовлении УУКМ и т.д.).

Литература

1. В.И. Бояринцев, Ю.В. Звягин. Исследование разрушения углеродистых материалов при высоких температурах // Теплофизика высоких температур № 5, 1975 г.
2. Н.Ю. Кочетков. Разработка и верификация метода и программы расчета внутриваллистических характеристик двигателей твердого топлива с двухсоставными зарядами для перспективных летательных аппаратов // Космонавтика и ракетостроение № 1, 2010 г.
3. В. Страус. Промышленная очистка газов. М. Химия, 1981 г.
4. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Закон пси от кси // Двигатель № 2, 2017 г.
5. В.В. Сычев. Дифференциальные уравнения термодинамики // М. Наука, 1981 г.
6. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Четвертое начало термодинамики или первое начало термогазодинамики // Двигатель № 4-5, 2016 г.
7. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Вывод уравнения импульсов из начал термодинамики // Двигатель № 3, 2016 г.
8. Ю.М. Кочетков. Турбулентность при нестационарных процессах // Двигатель № 6, 2019 г.
9. Ю.М. Кочетков. Турбулентность реальных газов. Благородное уравнение газовой динамики // Двигатель № 1, 2017 г.
10. В.А. Князев. Гидродинамика без гипотезы псевдоотверждения жидкой точки // Изд. LAP LAMBERT Academic Publishing, Германия, 2014 г.
11. Ю.М. Кочетков. Критические параметры процессов в энергодвигательных установках // Двигатель № 6, 2018 г.
12. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Энтропийные потоки и коэффициенты переноса // Двигатель № 4, 2017 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com



Натекание спутной ламинарной сверхзвуковой струи на торцевую преграду

https://youtu.be/kew2msVaYUo