

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

В результате обширного анализа параметров российских и иностранных ЖРД показано, что для современных двигателей возможное максимальное число Рейнольдса ограничено величинами $40 \cdot 10^6$. Рассчитано значение масштаба Колмогорова и показано, что оно зависит от величины плотности рабочего тела и, по существу, определяет предельную величину ячейки расчетной сетки. При этом предельная величина ячейки зависит от числа Рейнольдса и составляет величину в несколько процентов от величины масштаба. Определено местоположение странного аттрактора. Он находится в области критических термодинамических параметров. Применительно к двигателю – это область критического сечения сопла.

As a result of extensive analysis of the parameters of Russian and foreign LRE, it is shown that for modern engines the possible maximum number of Reynolds is limited to $40 \cdot 10^6$. The value of the Kolmogorov scale is calculated and it is shown that it depends on the density of the working fluid and, in essence, determines the limit value of the grid cell. In this case, the limit value of the cell depends on the Reynolds number and is a value of several percent of the scale. The location of the strange attractor is determined. It is located in the region of critical thermodynamic parameters. In relation to the engine – this is the area of the critical section of the nozzle.

Ключевые слова: турбулентность, странный аттрактор, масштаб Колмогорова, критические параметры.
Keywords: turbulence, strange attractor, Kolmogorov scale, critical parameters.

Среди больших нерешенных проблем классической физики турбулентность, несомненно, является старейшей. Несмотря на доступность и относительно низкую стоимость аппаратуры по изучению этого раздела газогидродинамики, несмотря на практическое отсутствие препятствий как физических, так и морально стимулирующих продвижения по этой проблеме, начиная с момента опытов Рейнольдса, практически не произошло. Многие авторы констатируют данную ситуацию как нонсенс [1]: "Несмотря на свою банальность, это замечание поднимает вопрос, который рано или поздно привлечет внимание историков науки, а именно вопрос о глубинных причинах (вызванных стечением обстоятельств или эпистемологического характера) относительно застоя в научной дисциплине, никогда не страдавшей от недостатка практической и экономической мотивации".

Во многих серьезных научных работах весьма недвусмысленно заявляется о том, что мы еще далеки, даже очень далеки от решения проблемы турбулентности, то есть от того, чтобы дать её точное объяснение и описать механизмы её возникновения. Вся проблема, по-видимому, заключается в том, что в настоящее время отсутствуют наглядные экспериментальные исследования на эту тему, что вызвано характером процесса. Это – мелкомасштабность и быстротечность. Современные индикаторы не позволяют этого делать, поэтому первичные базисные данные, которые могли бы войти в теорию как основа, отсутствуют. В связи с этим традиционными стали не феноменологические методы, а эвристические, основанные на абстрактных представлениях и конструировании сценариев.

Большим прогрессом в исследовании турбулентности было использование в качестве инструмента математической теории нелинейных уравнений. Это позволило разработать теорию устойчивости процессов в динамических системах. Под динамической системой понимается любая система, какова бы ни была её природа (физическая, химическая, электромагнитная и др.), которая может принимать различные математические формы: обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, отображений прямой и плоскости.

Важным положением этой теории (динамических систем) является наличие или отсутствие в этой системе внутреннего трения, присутствие или отсутствие диссипативности. Различают системы без трения. Это гамильтоновы системы. Здесь всё определяют начальные условия. В диссипативных системах начальные условия не влияют на последующее протекание процесса. Внутреннее трение влечет за собой существование в системе аттрактора – об-



Эдвард Лоренц

Давид Рюэль

Флорис Такенс

ласти притяжения всех решений системы. Аттрактором может быть точка равновесия, предельный цикл Пуанкаре. А также большим и наиболее важным открытием оказался странный аттрактор. Его в процессе численных расчетов обнаружил в 1963 году метеоролог Э. Лоренц. Математически это понятие было сформулировано в 1971 году Д. Рюэлем и Ф. Такенсом как ключевой элемент в понимании иррегулярного поведения, описываемого детерминистскими уравнениями в понимании турбулентности. Тем самым было положено начало исследованиям, так называемого, детерминированного хаоса.

В связи с чем возникла новая область физики, которую называют по-разному: нелинейная физика, теория турбулентности или хаоса. При этом ключевым элементом этой теории является странный или хаотический аттрактор.

Инструментарий нелинейной физики

В основу теории статистической турбулентности или, что тоже самое, детерминированного хаоса положена теория нелинейной физики, основанная на математической теории нелинейных дифференциальных уравнений. Само понятие нелинейность имеет строго математическую интерпретацию. Это по сути иррациональность, трансцендентность. Предсказать её с помощью кратных коэффициентов невозможно. И это понятие (нелинейность) приобретает определенный физический смысл при конкретном рассмотрении процессов, связанных с локализованными устойчивыми решениями, называемыми солитонами [2]. Физически появление солитонов связано с неперенным равенством диссипативных и дисперсных сил. И если в динамической системе появляются дисперсные силы, которые уравновешивают диссипативные, то система становится устойчивой и реализуются солитоны.

Ярким примером временного солитона являются автоколебания [3]. Забегая вперед, скажем, что наличие автоколебаний свидетельствует о присутствии предельного цикла Пуанкаре. Солитоном является также классическая уединенная волна Дж. Рассела [4].

Совершенно очевидно, что странный аттрактор тоже является солитоном. В соответствии с теорией, странный аттрактор появляется как асимптотический предел решений в фазовом пространстве при ведущем параметре, стремящемся к бесконечности. Для турбулентности этим параметром является число Рейнольдса. Фазовым пространством или фазовым портретом является математический объект, сформированный из дифференциального уравнения с помощью координат траекторий, касательных к ней скоростей, и является, в частности, линией на плоскости в координатах (x, ẋ). Если линия замкнутая, то говорят о положении равновесия или о предельном цикле Пуанкаре.

В качестве примера можно показать, что автоколебательный процесс, описанный в работе [5] уравнением

$$\frac{d^2\tilde{p}}{d\tau^2} + 4v \frac{kM^2}{R^2} \frac{d \ln \frac{R\omega}{\omega^2}}{d\tau} \tilde{p} = 0,$$

в фазовом пространстве представляется в виде предельного цикла Пуанкаре. Для этого по аналогии с [6] представим это уравнение в виде

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $q = \tilde{p}$;

$$\ddot{q} = \frac{d^2\tilde{p}}{d\tau^2} \text{ и } \omega_0^2 = 4v \frac{kM^2}{R^2} \frac{d \ln \frac{R\omega}{\omega^2}}{d\tau}.$$

Обозначения представлены в [6].

Пусть $q = y$, тогда имеем систему:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 q. \end{aligned}$$

Поделив второе уравнение на первое, получим уравнение

$$q dq + \frac{1}{\omega_0^2} = 0,$$

которое называется уравнением интегральных кривых в фазовом пространстве (q̇, q).

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{q^2}{2} + \frac{y^2}{2\omega_0^2} = c_1.$$

Константу c_1 представим в виде $2c_1 = c^2$.

Получаем, что вся фазовая плоскость заполнена вложенными друг в друга эллипсами (за исключением точки $q = y = 0$):

$$\frac{q^2}{c^2} + \frac{y^2}{(\omega_0 c)^2} = 1.$$

Такие траектории соответствуют периодическим движениям, поскольку фазовая точка движется по замкнутой кривой.

В общем случае, для систем с вынуждающей силой и затухающими колебаниями, например, для триодного генератора Ван дер Поля, колебания с малой амплитудой усиливаются, а с большой затухают. При этом линии в виде спиралей наматываются на замкнутую кривую в виде эллипса. И тогда эллипс является предельным циклом Пуанкаре [7].

Статистическая теория турбулентности

Согласно работе [8] можно заключить, что окончательной теории турбулентности на сегодняшний день не существует. Но существует несколько концепций. Наиболее распространенная из них концепция, построенная на сценарии, использующем понятие бифуркация: бифуркация удвоения периода. Это некий сценарий развития турбулентности, который предполагает первоначально присутствие в системе большого вихря. Этот вихрь дискретно при определенных условиях рассыпается на частикратно двум. В результате при достижении очень больших чисел Рей-

нольдса вихрь в соответствии со знаменитой теорией А.Н. Колмогорова становится предельным, который впоследствии превращается в тепло [9]. По всей видимости эта ситуация, когда достигается странный аттрактор, и есть момент возникновения хаоса. Подробности дробления большого вихря в литературе также представлены, и они сходятся на присутствии в процессе такого явления как каскадное разрушение - каскад Ричардсона. Как показали рассуждения и расчеты Фейгенбаума, этот каскад подчиняется некоему универсальному сценарию, опять тому же сценарию, использующему сценарий бифуркации удвоения периода [7]. Универсальность заключается в том, что, как показал тот же самый Фейгенбаум, разрушение происходит в соответствии с математической последовательностью

$$x_{n+1} = \lambda f(x_n),$$

а все значения сгущаются к некоторому значению $\lambda = \lambda_{кр}$. И как только $\lambda > \lambda_{кр}$, то внутри некоторой области фазового пространства оказывается бесконечное множество неустойчивых циклов с периодом

$$T_\infty = 2^\infty,$$

и вслед за этим сложным образованием сразу появляется хаотический (странный) аттрактор. Другими словами, создается ситуация перехода вихревого потока к своему предельному состоянию, к самой бурлящей турбулентности [10] - к хаосу, то есть мы вновь возвращаемся к ламинарному течению. Эта ситуация в переводе на физические процессы возникает при $Re \rightarrow \infty$.

О возможности получения решений при больших числах Рейнольдса методами современной вычислительной гидродинамики

Вся трагедия вычислительной гидродинамики заключается в том, что на сегодняшний день она построена на уравнениях Рейнольдса, страдающих многочисленными несоответствиями при описании истинной картины течений из-за многочисленных допущений, предположений и даже ошибок. Но это, как говорил сам Рейнольдс, всего лишь прием. Да, действительно, это именно прием, который позволяет хоть чего-нибудь посчитать. Экспериментами уравнения Рейнольдса не подкреплены, а массивованная корреляционная диагностика не является объективным доказательством верификации. Наиболее объективными экспериментами по турбулентности являются визуализационные с применением метода уноса массы [11].

Итак, как было показано выше, эвристические методы, зашедшие очень далеко в своих предположениях, при расчетных исследованиях с помощью современных электронных продуктов, накладываются на уравнения Рейнольдса и образуют весьма внушительную субстанцию. Следует поклониться тем людям, которые освоили эти программы, разбираются в многочисленных индексах этих сложнейших уравнений, приняли и применяют турбулентные сценарии. Поняли, как ни странно, что такое странный аттрактор. Но! Было бы все не так страшно, если бы все эти теории не приводили к заявлениям о том, что в настоящее время рассчитать турбулентную газовую динамику для больших чисел Рейнольдса современными методами принципиально невозможно [12]. Все расчетные решения на очень мелкой сетке будут давать случайные траектории. Все будет зависеть от степени точности задания исходных данных. Ну а странный аттрактор, тот предел, к которому стремится каждая из этих траекторий, вообще сосчитать невозможно. Что же делать? Может отказаться от этих монстроидальных методов и программ, к которым мы уже так привыкли, и они сидят у нас в крови? Думается, что это не получится по двум причинам. Первое - трудно отказаться от своего дитя, и второе - с помощью чего считать. Теперь беспристрастно проанализируем ситуацию.

1. До какой степени может расти число Рейнольдса? В работе автора неоднократно было показано, что самое большое число Рейнольдса для двигателя находится в критическом сечении:

$$Re = Re_{кр} / \bar{r}$$

здесь $Re_{кр}$ - число Рейнольдса в критическом сечении;

$\bar{r} = r/r_{кр}$ - степень расширения канала.

Рассчитаем это число для различных двигателей. Найдем зна-

чения $Re_{кр}$ для доступных конструкций и режимов.

На рис. 1 представлена гистограмма, построенная по результатам этих расчетов. Из нее видно, что самое большое число Рейнольдса не превышает $40 \cdot 10^6$.

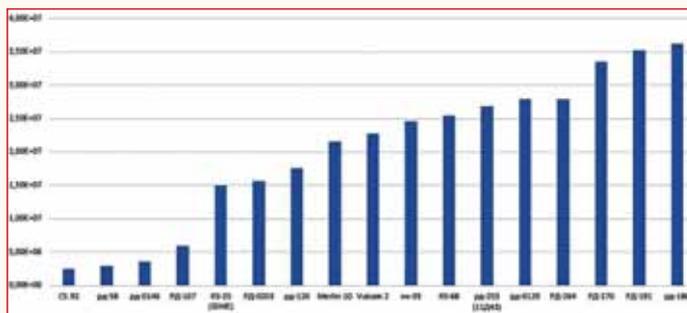


Рис. 1 Число Рейнольдса в критическом сечении (расчёт провёл Р.Е. Телюков)

2. Расчёты следует, видимо, проводить на сетке с размером меньшим, а может быть сильно меньшим колмогоровского масштаба. В соответствии с этим [12]:

$$\eta = l_0 Re^{-3/4}$$

С учетом того, что самое большое число Рейнольдса в критике, после преобразований получаем, что

$$\eta = \frac{v}{a_{кр}} = \frac{\mu}{\rho \cdot a_{кр}}$$

где η - колмогоровский масштаб;

μ, v - динамическая и кинематическая вязкости;

ρ - плотность рабочего тела;

$a_{кр}$ - скорость звука в критическом сечении.

Расчеты показали, что отношение $\mu/a_{кр}$ является величиной, примерно постоянной (рис. 2), а величина η существенно зависит от плотности продуктов сгорания (рис. 3)

$$\eta \sim 1/\rho$$

Это означает, что масштаб Колмогорова тем меньше, чем более плотное рабочее тело.

По размеру η можно вычислить размер ячейки расчётной сетки Δ , которая

$$\Delta < \eta \text{ либо } \Delta \ll \eta$$

3. Так получается, что в соответствии с теорией детерминированного хаоса странный аттрактор находится в области критического сечения сопла, которое и является местом появления хаоса, а, значит, он вполне прогнозируем. Все стало логичным: турбулентность кончается в критическом сечении, т.к. в соответствии с теоремой 5 [13] в сверхзвуковом потоке турбулентность отсутствует.

4. Полученное максимальное значение числа Рейнольдса в критическом сечении является лишь примером. В общем случае, для других аппаратов, турбины, форсунок и т.д. максимальное значение чисел Рейнольдса будет реализовываться при достижении критических термодинамических параметров (для ракетного двигателя это $M = 1$).

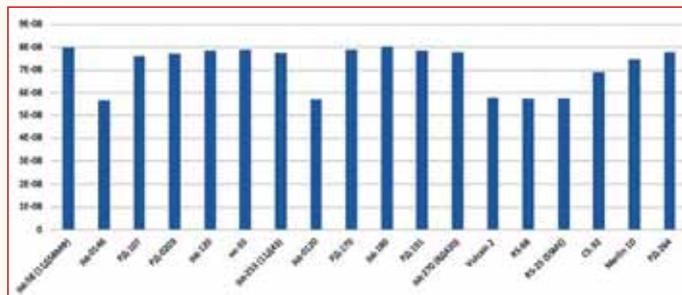


Рис. 2 Отношение динамической вязкости к скорости звука в критическом сечении (Р.Е. Телюков)

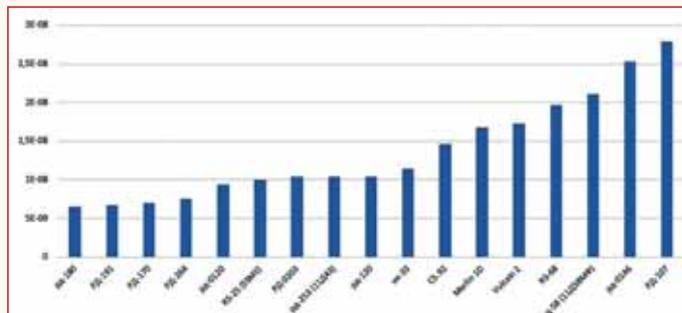


Рис. 3 Число Колмогорова (Р.Е. Телюков)

Литература

1. П. Берже, И. Помо, К. Видаль. Порядок в хаосе // М. изд. МИР, 1991 г.
2. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Солитоны и нелинейные волновые уравнения // М. изд. МИР, 1988 г.
3. А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний // М. Наука, 1981 г.
4. А.Т. Филиппов. Многоликий солитон // М. Наука, 1986 г.
5. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Постановка и определение акустических параметров задачи о ВЧ-устойчивости // Двигатель №2, 2019 г.
6. Д.И. Трубецков. Введение в синергетику. Колебания и волны. // М. УРСС, 2003 г.
7. Д.И. Трубецков. Введение в синергетику. Хаос и структуры. // М. УРСС, 2004 г.
8. Ю.И. Хлопков, В.А. Жаров, С.Л. Горелов. Когерентные структуры в турбулентном пограничном слое // М. МФТИ, 2002 г.
9. А.Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика // М. Наука, 1985 г.
10. Ю.М. Кочетков. Турбулентность и звук // Двигатель №4, 2006 г.
11. Ю.М. Кочетков. Турбулентность и математическое доказательство о ее невозможности в сверхзвуковом потоке // Двигатель №3, 2018 г.
12. А.С. Киселев. Диффузионное турбулентное горение // М. Труды НПО Энергомаш №26, 2008 г.
13. Ю.М. Кочетков, Т.Н. Кравчик, О.А. Подымова. Пять теорем турбулентности и их практические приложения // Вестник машиностроения №7, 2019 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com

ИНФОРМАЦИЯ

С 2007 г. в Гарвардском университете работают над роботизированной пчелой RoboBee - прототипом миниатюрных беспилотных летательных аппаратов. На первом этапе был создан пьезоэлектродвигатель, который обеспечивал тончайшим крыльям до 120 взмахов в секунду. Затем удалось стабилизировать полет и сделать его управляемым. Размер робота-насекомого составляет примерно половину размера обычной канцелярской скрепки, а масса менее 0,1 г.

Пьезоэлектродвигатель состоит из микроскопических полос из специального керамического материала, который сжимается и

расширяется под воздействием приложенного к нему электрического поля. Эти керамические полосы прикреплены к несущей конструкции из легкого углеродистого пластика и к крыльям, что позволило создать механо-электрический аналог мускулов, приводящих в движение крылья насекомого.

На втором этапе, для обеспечения выполнения более сложной траектории полета, были добавлены ещё два крыла.



В настоящее время, для того, чтобы сделать роботов RoboBee полностью автономными, исследователи работают над созданием малогабаритной и легкой системы аккумулирования энергии достаточной ёмкости. Это могут быть не только аккумуляторные батареи, но и малогабаритные топливные элементы, энергия от которого позволит роботу-насекомому RoboBee летать, не будучи привязанным к тончайшему электрическому кабелю.