УДК 532.526.4

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ ДЛЯ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Доказана теорема Бернулли для реальных газов. Показана ее справедливость вдоль линий тока для случая вязкого, сжимаемого и неравновесного газа. На примерах показана целесообразность применения этой теоремы для преоб-разований при доказательствах и объяснениях физических процессов.

Bernoulli's theorem for real gases is proved. Its validity along the flow lines for the case of viscous, compressible and non-equilibrium gas is shown. The expediency of application of this theorem for transformations at proofs and explanations of physical processes is shown on examples.

Ключевые слова: *турбулентность, теорема Бернулли, реальные газы.*

Keywords: *turbulence, Bernoulli's theorem, real gases.*

Пожалуй, самая распространенная теорема газовой динамики - это теорема Бернулли. Она применяется практически всегда, и каждый ученый никогда не оставлял ее без внимания. Для преобразований эта теорема просто великолепна. Она проста, наглядна и привлекательна. В простейшем случае ее представляют в виде полного давления, равного сумме статического и динамического

$$P_0 = P + \frac{\rho \bar{v}^2}{2}.$$

Причем, как правило, считается, что полное давление постоянно и не меняется от координаты и времени.

Это уравнение одинаково применяется и для жидкости, и для газа. Оно необходимо для нахождения связи скорости с давлением. Практическое применение этого уравнения неподражаемо. Оно применяется везде.

В дифференциальной форме это уравнение, по сути, превращается в уравнение Эйлера для стационарного случая и в градиентной форме оно выглядит приближенно так:

$$\rho \bar{v} \,\mathrm{grad} \bar{v} = -\mathrm{grad} P.$$

Здесь, конечно же, не учтены сжимаемость и, как видим, вязкость. Поэтому оно, уравнение Бернулли, так же, как и уравнение Эйлера справедливо только для идеального случая. Оно не справедливо для реальных газов и его применение должно сопровождаться предварительным анализом. Оно хорошо описывает процессы в жидкостях. Но в газах, особенно в высокоэнтальпийных - нет. Здесь нужны по крайней мере поправки.

Само уравнение Бернулли было получено им из закона сохранения суммы потенциальной и кинетической энергии. Он был первым, кто интуитивно применил к течению этот фундаментальный закон сохранения. После соблюдения всех предосторожностей, которые возникали на пути теоретических рассуждений, Бернулли произвел опыты с жидкостью и получил согласие с опытом. Именно согласие с опытом, вот чем не могли похвастать коллеги Бернулли - выдающиеся математики Эйлер и Даламбер [1]. Теорема Бернулли была апробирована экспериментально. В этом ее ценность. Для того времени, времени возрождения газовой динамики и гидродинамики эта теорема была главной, на которой базировались основные понятия и цементировалось здание науки. В последующем эта теорема была строго получена из уравнений Эйлера. Была доказана ее справедливость для жидкостей и идеальных газов [2].

Как доказывалась теорема Бернулли

Вначале, в середине семнадцатого века, Паскалем был открыт закон изотропии нормальных напряжений в точках сплошной среды, находящейся в равновесии. Общее значение нормальных напряжений с обратным знаком было названо давлением, а тензор напряжений при этом записывался как:

$$\Pi = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} = -P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -PE.$$

Тензор обладал сферической симметрией, что соответствует свойству изотропии.

Далее в соответствии с представлением Коши дивергенцию от этого тензора можно написать в виде:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \mathrm{div}\,\Pi.$$

И в общем случае, с учетом внешних объемных сил:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \rho \bar{F} + \mathrm{div}\,\Pi.$$

Или, применяя запись через давление, получаем уравнение Эйлера:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{d\tau} = -\mathrm{grad} P + \rho \bar{F}.$$

Великий русский ученый Леонард Эйлер среди многого прочего ввел в качестве понятий в газовую и гидродинамику две фундаментальные вещи:

1. Он ввел в газодинамический анализ дифференциальное исчисление. Здесь он был первым и
2. Он ввел в обиход газовой динамики понятие субстанциональной производной:

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\bar{v}.$$

После чего уравнение Эйлера было записано:

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau} + \bar{v}\,\mathrm{grad}\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad} P + \bar{F}$$

Далее с помощью преобразования Ламба и Громеки это уравнение было переписано в виде:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \mathrm{grad}\frac{\bar{v}^2}{2} + [\mathrm{rot}\,\bar{v} \times \bar{v}] = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad} P + \bar{F}.$$

Даниил Бернулли | Блез Паскаль | Ипполит Степанович Громека | Горейс Ламб

Если теперь представить объемные внешние силы как потенциальные

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\,\varphi,$$

ввести баротропную функцию давления

$$\mathcal{P}(p) = \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\rho(P)},$$

то уравнение можно переписать:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \mathrm{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} + \varphi\right) + [\mathrm{rot}\,\vec{v} \times \vec{v}] = 0.$$

Если это уравнение умножить скалярно на вектор скорости v, то для стационарного случая получится уравнение

$$\vec{v}\,\mathrm{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} + \varphi\right) = 0.$$

Откуда последует равенство:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} + \varphi = \mathrm{const}.$$

Это и есть теорема Бернулли. В упрощенном виде без внешних сил и постоянной плотности она уже была записана. Вспоминая производную по направлению [2], эта теорема формулируется следующим образом:

"Вдоль линии тока градиент сохраняет одно и то же значение". Значение под градиентом рассматривают как первый интеграл уравнения Эйлера, справедливый в случае стационарного движения при наличии функции давления и потенциала внешних объемных сил.

Теорема Бернулли для реального газа

Теорему Бернулли можно трактовать как полную механическую энергию в данной точке, отнесенную к единице массы. Действительно размерность давления есть ньютон на метр квадратный, а это означает, что та же самая размерность есть джоуль на метр кубический ($Н/м^2 = Дж/м^3$).

И тогда для идеального газа, уравнение Бернулли в полученном выше виде можно трактовать как первое начало термодинамики для идеального газа. А для реального? А для реального газа нет. Для реального газа нужно пользоваться другими уравнениями.

Для получения уравнения Бернулли для реального газа за основу возьмем уравнение движения, полученное в [3]:

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial \tau} = \mathrm{div}\Pi + \frac{k+1}{k-1} P\,\mathrm{grad}\ln\frac{P}{R_\mu}\,\psi(\zeta).$$

Для большей наглядности его перепишем в традиционном виде:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \mathrm{grad}\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}P - \frac{4}{3}\nu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v} + [\mathrm{rot}\,\vec{v} \times \vec{v}] +$$

$$+ \nu\,\mathrm{rotrot}\,v - \frac{k+1}{k-1}\frac{P}{\rho}\,\mathrm{grad}\ln\frac{P}{R_\mu}\,\psi(\zeta) = 0.$$

Соберем все значения с градиентами под одну скобку и обозначим буквой $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \mathrm{grad}\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}P - \frac{4}{3}\nu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v} - \frac{k+1}{k-1}\frac{P}{\rho}\,\mathrm{grad}\ln\frac{P}{R_\mu}\,\psi(\zeta).$$

Тогда

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \vec{B} + [\mathrm{rot}\,\vec{v} \times \vec{v}] - \nu\,\mathrm{rotrot}\,\vec{v} = 0.$$

На полученный вектор воздействуем оператором дивергенция. Первый и четвертый член обратятся в ноль, а третий член запишется в виде [4]:

$$\mathrm{div}[\mathrm{rot}\,\vec{v} \times \vec{v}] = \vec{v}\,\mathrm{rotrot}\,\vec{v} - \mathrm{rot}\,\vec{v} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{v}.$$

Правая часть полученного равенства в соответствии со второй теоремой турбулентности о соотношении движений [5] превратится в ноль, так как

$$\vec{v}\,\mathrm{rotrot}\,\vec{v} = \mathrm{rot}^2\vec{v}.$$

При этом $\mathrm{div}\,\vec{B}$ также будет равно нулю и в частном случае:

$$\mathrm{grad}\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}P - \frac{4}{3}\nu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{v} - \frac{k+1}{k-1}\frac{P}{\rho}\,\mathrm{grad}\ln\frac{P}{R_\mu}\,\psi(\zeta) = 0.$$

Полученное уравнение и есть уравнение Бернулли для реального газа. Докажем это более наглядно по аналогии с [2].

Действительно первые два члена - это уравнение Бернулли для идеального газа (внешние силы не учитываются).

Третий член, содержащий вязкость ν и сжимаемость $\mathrm{div}\,\vec{v}$ отражает вязкие сжимаемые силы, то есть реальные потоки.

Последний член учитывает возможную химическую неравновесность при реальном термодинамическом процессе.

Внимательно анализируя второй и четвертый члены полученного уравнения можно сказать, что это силы одной природы, только второй описывает замороженное течение, а четвертый в совокупности со вторым при $\psi(\zeta) = 1$ - равновесное. В целом их сумма, для заданных относительных температур ζ, отражает реальную ситуацию. И всегда второй и четвертый члены должны рассматриваться вместе.

Их целесообразно объединить в некоторую функцию давления, по аналогии с баротропной функцией в виде интеграла с верхним пределом [2].

Далее умножим скалярно уравнение движения на вектор скорости $\vec{v}$. При этом в силу перпендикулярности последнего вектору $\vec{v}$, имеем:

$$\vec{v}\,\mathrm{grad}\vec{B} = v\left(\frac{\vec{v}}{v}\,\mathrm{grad}\vec{B}\right) = 0.$$

Вспоминая определение производной по направлению

$$\left(\frac{\vec{v}}{v}\,\mathrm{grad}\vec{B}\right) = \frac{d\vec{B}}{dS},$$

заключаем, что $d\vec{B}/dS = 0$. Здесь символ d/dS означает производную, взятую вдоль линии тока.

Тогда уравнение Бернулли для реального газа вдоль линии тока запишется как:

$$\mathrm{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \pi - \frac{4}{3}\nu\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right) = 0.$$

Или:

$$\pi + \frac{\vec{v}^2}{2} - \frac{4}{3}\nu\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \mathrm{const}.$$

В предельном случае идеального газа, когда вязкость и сжимаемость отсутствуют, а течение происходит без всяких реакций, это уравнение стремится к уравнению Бернулли для идеального газа:

$$P + \frac{\rho\vec{v}^2}{2} = \mathrm{const}.$$

Следует отметить, что полученное новое уравнение справедливо вдоль линии тока, а новая теорема формулируется следующим образом:

"Для реального газа, обладающего свойством вязкости, сжимаемости и неравновесности вдоль линии тока будет выполняться уравнение Бернулли для реального газа, полученное из уравнения движения с учетом реальных свойств".

Комментарии P.S.

Последняя теорема имеет большое значение в плане понимания физических процессов, происходящих в жидких и газообразных средах. Она дает возможность точно, без предположений и оценок проводить преобразования уравнения движения и других уравнений сохранения. Теорема является некоторой модификацией первого начала термодинамики - закона сохранения и превращения энергии.

Практическое приложение этой теоремы может быть проиллюстрировано на примере доказательства теоремы №5 турбулентности [6], где было применено упрощающее предположение о малом влиянии вязкости в ядре потока. Применение полученной теоремы позволяет данную операцию выполнить точно.

В работе [7] при выводе уравнений, описывающих возникновение неустойчивости, была произведена оценка малости вязкого члена по сравнению с инерционным. При этом были использованы экспериментальные обобщения, полученные при анализе натурных двигателей. Применение доказанной теоремы избавляет автора от сложных физических, а порой философских доказательств этой части преобразований.

При выводе уравнений движения с учетом неравновесности [3] также было сделано логичное предположение о постоянстве суммы градиентных членов в уравнении импульсов. Это предположение оказалось правильным и благодаря последней теореме справедливым.

Литература

1. Г.В. Смирнов. Рожденные вихрем // М. Знание, 1982.
2. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкостей и газов // М. Дрофа, 2003.
3. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Неравновесные пристенные течения в двигателях летательных аппаратов // Двигатель №1, 2018.
4. Н.Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления // М. изд. Академии наук СССР, 1951.
5. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Новая интерпретация второго закона термодинамики и теорема векторного анализа о соотношении движений // Двигатель №6, 2016.
6. Ю.М. Кочетков. Турбулентность и математическое доказательство о ее невозможности в сверхзвуковом потоке // Двигатель №3, 2018.
7. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Неустойчивость при работе тепловых турбомашин // Двигатель №2, 2018.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com

ИНФОРМАЦИЯ

Британская оборонная компания QuinetiQ в 2003 г. приступила к разработке беспилотных летательных аппаратов "Zephyr", способных осуществлять многомесячные полеты в стратосфере до 30 км исключительно на солнечной энергии. Компания предполагала, что её в перспективе удастся довести продолжительность нахождения БПЛА в воздухе до трех месяцев.

В первой модификации БПЛА "Zephyr" имел размах крыльев - 18 м, а взлетную массу - 31 кг. В первом же полете он установил мировой рекорд по длительности нахождения в воздухе для беспилотных ЛА продолжительностью в 54 часа. Максимальная высота полета достигла 18 тыс. м.

Взлёт первого БПЛА "Zephyr"

У следующей модификации был увеличен размах крыла до 22,5 м, а взлетная масса немного превысила 50 кг. В 2008 г. этот аппарат установил новый мировой рекорд - 82 ч 37 мин. После этого полета совершенствование БПЛА продолжилось. Благодаря ультралегкому карбоновому корпусу и совершенной аэродинамической форме удалось уменьшить лобовое сопротивление и повысить аэродинамическое качество беспилотника. Вкупе с новой комплексной системой управления питанием в 2010 г. удалось установить очередной рекорд - 168 часов.

В 2014 г. усовершенствованный в очередной раз БПЛА "Zephyr" совершил в течение 11 суток беспосадочный полет в зимних условиях на высоте более 23 км и впервые использовал спутниковую связь для контроля за полетом вне зоны прямой видимости станций слежения наземного базирования. Аппарат также нес полезную нагрузку.

Первый серийный БПЛА "Zephyr" в полёте

Взлёт первого беспилотника "Zephyr", выполненного в серийной версии, состоялся 11 июля 2018 г. В ходе полёта аппарат достиг рекордной для своего класса высоты полета - 21562 м, а продолжительность его полёта составила 25 дней 23 часа и 57 минут.

У беспилотника отсутствует шасси и его запуск осуществляется с рук. В полёте днем он получает энергию от Солнца и направляет её на электродвигатели и на подзарядку серно-литиевых аккумуляторов, энергия от которых используется ночью. Солнечная энергия преобразуется в электрическую фотоэлементами на основе аморфного кремния. Толщина солнечных панелей не превышает толщины листка бумаги, и они покрывают всю поверхность крыльев. Аккумуляторы разработаны компанией Sion Power Inc. Два электродвигателя обеспечивали БПЛА массой 75 кг крейсерскую скорость порядка 32 км/ч.

На беспилотнике может быть размещена фотоаппаратура высокого разрешения для наблюдения за земной поверхностью или ретрансляционная аппаратура для обеспечения связью или Интернетом удаленных районов. В настоящее время масса полезной нагрузки составляет 5 кг.

Ультралегкий БПЛА "Zephyr" относят к классу псевдоспутников (HAPS - high-altitude pseudo-satellite), которые занимают промежуточное положение между спутниками и летательными аппаратами. В 2014 г. БПЛА "Zephyr" стал первым псевдоспутником, получившим от военных идентификатор PS001. Такие БПЛА обеспечивают как длительное нахождение в воздухе, так и возможность постоянного нахождения над определённым местом в отличие от спутника, который может повторно пролететь над одной и той же точкой только через 24 часа. Полеты осуществляются на таких высотах, на которых на него не влияют погодные условия и полеты коммерческой авиации. Стоимость запуска БПЛА данного класса существенно ниже вывода на орбиту спутника.

БПЛА "Zephyr" будут предлагать в двух версиях: однофюзеляжном - "Zephyr-S" и двухфюзеляжном - "Zephyr-T". "Zephy -T" отличается увеличенным с 25 до 33 метров размахом крыла, что позволит ему нести до 20 кг полезной нагрузки.

В феврале 2016 года Минобороны Великобритании заключило с Airbus Defence and Space контракт на поставку двух БПЛА "Zephyr-S" на солнечной энергии. Стоимость поставки и демонстрации возможностей применения БПЛА превышает 10,6 млн фунтов стерлингов (15,2 млн долларов). В августе 2016 года британское военное ведомство реализовало опцион на поставку третьего беспилотника, что увеличило стоимость покупки до 13 млн фунтов стерлингов.

Рекордный БПЛА "Zephyr" принадлежал компании Airbus. Следующий испытательный полет БПЛА "Zephyr" запланирован на октябрь этого года. Он пройдёт над Австралией.