

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕЁ НЕВОЗМОЖНОСТИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Получены новые уравнения для описания турбулентного процесса в двигателях летательных аппаратов (ЖРД, РДТТ и др.). Отмечены области появления турбулентности в дозвуковом и сверхзвуковом потоках. Доказана теорема о невозможности существования турбулентности в сверхзвуковых потоках. Показано, что в сверхзвуковом сопле могут образовываться дозвуковые зоны, где турбулентность возможна (пристеночные отрывные течения, ударные волны и др.).

New equations for the description of turbulent process in aircraft engines (LRE, rdt, etc.) are obtained. The area of occurrence of turbulence in subsonic and supersonic flows. A theorem about the impossibility of the existence of turbulence in supersonic flows. It is shown that subsonic zones can be formed in the supersonic nozzle, where turbulence is possible (wall separation flows, shock waves, etc.).

Ключевые слова: турбулентность, сверхзвук, градиент, вихрь.
Keywords: turbulence, supersonic, gradient, vortex.

В настоящее время создается все больше и больше математических продуктов, нацеленных на решение актуальных задач, связанных с течением сверхзвуковых потоков. Это задачи определения поля скоростей, профилирования сверхзвуковых сопел, теплообмена и разрушения стенок, выработка граничных условий для решения задач регенерации в ЖРД, разработка методов и программ по определению тяги, удельного импульса тяги и других интегральных характеристик и многие другие проблемы. Большой популярностью в качестве исходного продукта пользуются многочисленные программы, построенные на уравнениях О. Рейнольдса. Точнее, эти программы разработаны на базе предложенного О. Рейнольдсом искусственного приема, который он применил для упрощения уравнений Навье-Стокса. На первый взгляд этот прием условно разделил поток на поток по руслу и поток пульсационный, практически поперек первого, того, что по руслу. Этот искусственный прием однозначно декларировал присутствие пульсаций, в том числе и в сверхзвуковом потоке. К слову сказать, сам О. Рейнольдс не определил, что такое пульсация. Это в дальнейшем сделал Л. Прандтль, который сказал, что это некое случайное движение молекул из мест с их переизбытком в места, где их меньше. По существу, некоторая турбулентная диффузия. Прандтль согласно этой гипотезе разработал целую теорию, к которой в последствии присоединился Т. Карман. По существу, теория Прандтля основывается на переносе количества движения и именно это является тем физическим свойством, которое присуще турбулентности.

В противоположность Л. Прандтлю английский ученый Г. Тейлор предложил считать, что турбулентностью переносится не количество движения, а завихренность - вращение группы частиц жидкости. Развивая таким образом методы Рейнольдса, Тейлор упростил уравнение Навье-Стокса и получил связь условий скорости вращения потока с градиентом давления:

$$[\text{rot} \vec{v} \cdot \vec{v}] \approx \frac{1}{\rho} \text{grad} P.$$

Такой подход более понятен в отличие от подхода Прандтля. Вихрь имеет четкий физический смысл, а пульсация - может быть всего лишь следствием взаимодействия вихря со смежной линией тока.

Итак, при дальнейших рассуждениях будем считать, что турбулентность - это такое течение, при котором в потоке появляются вихри $\text{rot} \vec{v}$ или жгуты $\text{rot} \text{rot} \vec{v}$. Если в потоке таких образований нет, то поток является ламинарным. Более того, уже было экспериментально доказано, что ламинарный поток при увеличении интенсивности течения, а именно при увеличении числа Рейнольдса переходит в состояние турбулентности. По пути он теряет два раза устойчивость (волны Толмина-Шлихтинга и градиентные волны Кельвина-Гельмгольца) и в результате достигает устойчивых вихревых конфигураций [1].

Экспериментально также было показано, что в сверхзвуковом потоке имеет место только ламинарное течение [2].

Далее, для большей убедительности выдвинутого положения о невозможности существования в сверхзвуковом потоке вихрей, а значит и турбулентности, докажем математически теорему №5 [3]. Для доказательства воспользуемся тремя положениями:

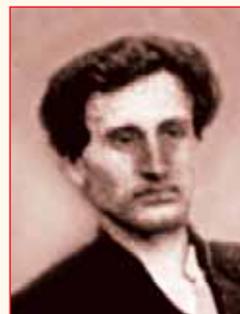
1. Будем считать, что вдоль линии тока будет приближенно выполняться уравнение Бернулли. Причем линии тока у стенки сверхзвукового сопла пока учитываться не будут. В данном случае уравнение Бернулли выступает как механическая форма сохранения энергии. С учетом вязких членов (они считаются значительно меньшими инерционных) это уравнение можно интерпретировать как первый закон термодинамики.

2. Для вывода привлечем уравнение Л.А. Вулиса об обращении воздействия в целях выделения областей сверхзвукового течения.

Справедливости ради следует сказать, что похожее на уравнение Л.А. Вулиса для площадей ранее было записано П.А. Гюгонно, и сама форма этого уравнения в общем-то была известна, но в общем виде с привлечением всех составляющих уравнений сохранения



Лев Абрамович Вулис



Пьер-Анри Гюгонно

оно было дано именно Л.А. Вулисом. И Вулис подошел к этому уравнению как к инструменту анализа сопловых течений, рассмотрел геометрическое, тепловое и расходное сопло.

3. Основным уравнением остается уравнение движения, аналогичное уравнению Навье-Стокса, записанное через импульсы [4].

Вывод основного соотношения

Вначале запишем дифференциальное уравнение Бернулли. При этом считаем, что вдали от стенки оно выполняется вдоль линии тока, а вязкие члены малы по сравнению с инерционными:

$$dP = -d \frac{\rho \vec{v}^2}{2} \approx -\rho \vec{v} d\vec{v}.$$

Тогда

$$\frac{dP}{\rho \vec{v}^2} = - \frac{\vec{v} d\vec{v}}{\vec{v}^2}.$$

Давление переведем в скоростной напор, так как

$$P_0 = P + \frac{\rho \vec{v}^2}{2} = \text{const},$$

то

$$\frac{dP}{\rho v^2} = -\frac{d\frac{\rho \vec{v}^2}{2}}{\rho \vec{v}^2} = -\frac{d\frac{\rho \vec{v}^2}{2}}{2\frac{\rho \vec{v}^2}{2}} = -\frac{\vec{v}d\vec{v}}{\vec{v}^2}.$$

Условно это

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\frac{\rho \vec{v}^2}{2}}{2\frac{\rho \vec{v}^2}{2}}.$$

Переход дозвукового потока в сверхзвуковой можно охарактеризовать с помощью уравнения обращения воздействия Л.А. Вулиса, которое для случая отсутствия активной работы и сил трения может быть для установления связей параметров процесса записано следующим образом:

$$(1 - M^2) \frac{dv}{v} = \frac{dG}{G} - \frac{dF}{F} = \frac{dj}{j} = \frac{\vec{j}d\vec{j}}{\vec{j}^2}.$$

В векторной форме это будет выглядеть:

$$(1 - M^2) \frac{\vec{v}d\vec{v}}{\vec{v}^2} = (1 - M^2) \frac{d\frac{\rho \vec{v}^2}{2}}{2\frac{\rho \vec{v}^2}{2}}.$$

Или:

$$(1 - M^2) \frac{d\frac{\rho \vec{v}^2}{2}}{2\frac{\rho \vec{v}^2}{2}} = \frac{\rho \vec{v}d\rho \vec{v}}{(\rho \vec{v})^2} = \frac{\vec{j}d\vec{j}}{\vec{j}^2}.$$

Тогда:

$$(1 - M^2) d\frac{\rho \vec{v}^2}{2} = 2\frac{\rho \vec{v}^2}{2} \cdot \frac{\rho \vec{v}d\rho \vec{v}}{(\rho \vec{v})^2} = \vec{v}d\rho \vec{v}.$$

Или в виде производной по времени:

$$(1 - M^2) d\frac{\rho \vec{v}^2}{d\tau} = v \frac{d\rho \vec{v}}{d\tau}.$$

После преобразований получаем

$$\vec{v} \frac{d\vec{j}}{d\tau} = -(1 - M^2) \frac{dP}{d\tau}.$$

Далее записываем уравнение движения по аналогии с уравнением Навье-Стокса:

$$\frac{d\vec{j}}{d\tau} = -\text{grad}P + \frac{4}{3} v \text{graddiv}\vec{j} - v \text{rotrot}\vec{j}.$$

Раскрываем субстанциональную производную:

$$\frac{d\vec{j}}{d\tau} + \frac{\vec{j}}{\rho} \text{grad}\vec{j} + \text{grad}P - \frac{4}{3} v \text{graddiv}\vec{j} + v \text{rotrot}\vec{j} = 0.$$

Или:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \frac{\vec{j}^2}{2} + \text{grad}P + \frac{1}{\rho} [\text{rot}\vec{j} \times \vec{j}] - \frac{4}{3} v \text{graddiv}\vec{j} = -v \text{rotrot}\vec{j};$$

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial \tau} + \text{grad} \frac{\rho \vec{v}^2}{2} - \frac{\vec{j}^2}{2} \text{grad} \frac{1}{\rho} + \text{grad}P + \frac{1}{\rho} [\text{rot}\vec{j} \times \vec{j}] - \frac{4}{3} v \text{graddiv}\vec{j} = -v \text{rotrot}\vec{j}.$$

Продолжаем преобразовывать.

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial \tau} + \text{grad}P + \text{grad} \frac{\rho \vec{v}^2}{2} + \frac{\vec{v}^2}{2} \text{grad}\rho + \frac{4}{3} v \text{grad} \frac{d\rho}{d\tau} + \frac{1}{\rho} [\text{rot}\vec{j} \times \vec{j}] = -v \text{rotrot}\vec{j}.$$

Преобразуем четвертый член и накладываем на него преобразование Лежандра:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial \tau} + \text{grad} \frac{M^2 P}{2} - P \text{grad} \frac{M^2}{2} + \text{grad}P + \text{grad} \frac{\rho \vec{v}^2}{2} + \frac{4}{3} v \text{grad} \frac{d\rho}{d\tau} + \frac{1}{\rho} [\text{rot}\vec{j} \times \vec{j}] = -v \text{rotrot}\vec{j}.$$

Учитывая малость величины давления в сопле, удаляем третий член, а остальные градиенты объединяем в скобках:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial \tau} + \text{grad} \left(P + \frac{\rho \vec{v}^2}{2} + \frac{M^2 P}{2} + \frac{4}{3} v \frac{d\rho}{d\tau} \right) + \frac{1}{\rho} [\text{rot}\vec{j} \times \vec{j}] = -v \text{rotrot}\vec{j}.$$

В скобках, по существу, осталось уравнение Бернулли, записанное вдоль линии тока, учитывающее вязкость и сжимаемость. Причем учитывая удаленность от стенки, принимаем условие, что два правых члена в скобках малы по сравнению с двумя левыми. Это дает основание считать содержимое в скобках постоянной величиной. Тогда переписываем:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho} [\text{rot}\vec{j} \times \vec{j}] = -v \text{rotrot}\vec{j}.$$

Последнее уравнение умножаем скалярно на вектор j и получаем

$$\vec{j} \frac{\partial \vec{j}}{\partial \tau} = -v \vec{j} \text{rotrot}\vec{j}.$$

Вспоминая преобразование

$$\vec{v} \frac{\partial \vec{j}}{\partial \tau} = -(1 - M^2) \frac{dP}{d\tau} = -(1 - M^2) \vec{v} \text{grad}P,$$

получаем

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial \tau} = -(1 - M^2) \text{grad}P.$$

Подставляя его в основное уравнение, получаем далее:

$$-\vec{j}(1 - M^2) \text{grad}P = -v \vec{j} \text{rotrot}\vec{j}.$$

Воспользуемся теоремой о соотношении движений:

$$\text{rot}^2 \vec{j} = \frac{\vec{j}}{v} (1 - M^2) \text{grad}P.$$

Для дальнейшего анализа удобнее от $\text{grad}P$

перейти к $\text{grad} \frac{\rho \vec{v}^2}{2}$: $\text{grad}P = -\text{grad} \frac{\rho \vec{v}^2}{2}$.

Тогда подставляем член с градиентом скорости и извлекаем корень:

$$\text{rot}\vec{j} = \pm \sqrt{\frac{\vec{j}}{v} (M^2 - 1) \text{grad} \frac{\rho \vec{v}^2}{2}}.$$

Итак, получено уравнение для $\text{rot}\vec{j}$ в зависимости от основных характеристик. Из этого уравнения выявляются важные следствия. Прежде чем их описать, условимся считать поток турбулентным в случае присутствия в нем вихревых структур, то есть присутствия в потоке конечных величин rot и rotrot . Если эти величины равны нулю или не существуют в решениях, то поток считается ламинарным. И второе. При правильном проектировании двигателя (ЖРД, РДТТ и др.) давление по всему тракту в сторону среза сопла всегда только падает, а скорость только растет, то есть $\text{grad}P < 0$, а $\text{grad}\vec{v} > 0$. В случае возникновения обратных условий, когда $\text{grad}P > 0$ и $\text{grad}\vec{v} < 0$ - возникает турбулентность и возможен отрыв потока, либо возникнут такие условия, когда в сверхзвуковом потоке появятся ударные волны.

Следствие из основного уравнения

1. Анализируя уравнение для $\text{rot}\vec{j}$, вначале отметим - два знака перед корнем говорят о том, что одновременно существует два

решения: одно условно с положительным вращением, другое с отрицательным. Это означает, что вихрь будет устойчивым тогда, когда он является парным. Этот известный факт не требует доказательства, а формула не противоречит традиционным взглядам.

2. Импульс под корнем говорит о том, что если он больше, то вихрь мощнее. То есть скорость вдоль линий тока, сопряженных с вихрем, их величина, определяют скорость вращения вихря.

3. Вязкость в знаменателе под корнем говорит о том, что чем она больше, тем вихрь меньше. Вязкость снижает интенсивность вихрей. Она гасит турбулентность. Недаром очень вязкие жидкости текут в ламинарном режиме.

4. Рассмотрим дозвуковое течение $M < 1$. Тогда из уравнения

$$\text{rot} \vec{j} = \pm \sqrt{\frac{\vec{j}}{v}} (1 - M^2) \text{grad} P$$

следует, что при $\text{grad} P < 0$ ротор не существует. Течение ламинарное. То есть при нормальном движении потока, он ламинарный. Теперь, если возникает положительный градиент давления $\text{grad} P > 0$, тогда $\text{rot} \vec{j}$ - конечен и следует ожидать отрыва, то есть появления турбулентности. Это опять же не противоречит традиционным представлениям.

5. В критическом сечении при $M = 1$ турбулентность никогда не возникает, так как $\text{rot} \vec{j} = 0$.

6. При сверхзвуковом течении, как следует из формулы

$$\text{rot} \vec{j} = \pm \sqrt{\frac{\vec{j}}{v}} (M^2 - 1) \text{grad} \frac{\rho \vec{v}^2}{2}$$

значение под корнем отрицательное, так как градиент с увеличением числа Маха в сверхзвуковом сопле дальше от единицы имеет отрицательное значение. Правда в непосредственной близости к единице есть небольшая область положительных значений. Это область трансзвуковых течений.

Из последнего уравнения следует, что при сверхзвуковом потоке $\text{rot} \vec{j}$ не существует. Другими словами, отсутствует возможность появления турбулентности в сверхзвуковом потоке. Тем самым доказывается математически пятая теорема турбулентности: **сверхзвуковой поток всегда ламинарный.**

7. Если в сверхзвуковом потоке сложится ситуация, когда градиент скорости будет отрицательным, или, что тоже самое, градиент давления окажется положительным, тогда может появиться турбулентность. Величина вихря будет иметь конечное значение.

Такие зоны могут образоваться у стенки сопла при отрыве потока. Также эти зоны могут появляться в образе ударных волн.

Известна теорема Крокко [5, 6], которая утверждает, что если в однородном потоке имеется криволинейная ударная волна, то за ней энтропия изменяется от одной линии тока к другой, а поток за такой ударной волной является завихренным.

Но этого мало. Из наших соотношений получается, что именно внутри самой ударной волны существует турбулентность. В принципе это может оказаться реальным при мощных ударных волнах. Но смущают малые размеры самой ударной волны. Это ведь всего десяток длин свободного пробега молекул. Сразу встает вопрос о сплошности потока в этой области. Остается только предполагать, что там (внутри ударной волны) реализуется предварительная турбулентность переходного периода в виде волн. Оставляем этот момент анализа для дискуссий. Итак, можно сформулировать пятую теорему турбулентности более конкретно, основываясь на проведенных математических доказательствах: **"Турбулентность в сверхзвуковом потоке отсутствует".**

Это означает, что перемешивание потока может происходить только путем молекулярной диффузии.

Комментарии P.S.

Из полученного уравнения для ротора следует критерий начала турбулентности, то есть появление первых вихрей. Но известно, что для трубы и пластины ситуации, когда $\text{grad} P = 0$, Рейнольдсом и его последователями экспериментально путем визуализации были получены критерии перехода к турбулентности:

$\text{Re}_{\text{кр.тр.}} > 2400, \text{Re}_{\text{кр.пл.}} > 10^6$. При этом, и сам Рейнольдс и его последователи не уточняют структурно, что такое турбулентность. Рассуждения останавливаются на случайных пульсациях.

Анализируя предыдущие работы [7], вспомним, что же такое турбулентность. Конечно же, это прежде всего вихревые структуры. Но им предшествуют неустойчивые переходы в виде волн. Ранее, с помощью работ А.А. Павельева со спутными дозвуковыми струями, было показано [8], что поток при его интенсификации преодолевает несколько зон устойчивых течений [9]. Так в диапазоне сдвиговых чисел Рейнольдса $0 < \Delta \text{Re} < 3 \cdot 10^3$ имеет место ламинарное течение. При $3 \cdot 10^3 < \Delta \text{Re} < 6 \cdot 10^3$ возникают волны Толмина-Шлихтинга. В диапазоне $6 \cdot 10^3 < \Delta \text{Re} < 9 \cdot 10^3$ образуются градиентные волны Кельвина-Гельмгольца. Далее при $\Delta \text{Re} > 9 \cdot 10^3$ в опытах Павельева фиксируется так называемая развитая турбулентность. Эта область имеет сугубо пространственный характер и не проявляется структурно при визуальном наблюдении.

С помощью экспериментального метода уноса массы [10] на сверхзвуковых соплах удалось установить дальнейшее развитие турбулентного течения.

Было показано, что градиентные волны Кельвина-Гельмгольца достигают очень крутых конфигураций, вплоть до "градиентной катастрофы". При этом внешние линии тока, омывающие эти волны, отрываются, ударяясь о стенку (рис. 1). При этом образуются продольные вихри Тейлора-Гертлера. Это такие винтовые течения, которые, вращаясь попарно, заполняют весь периметр вблизи стенки сопла. Эти вихри характеризуются наличием в потоке положительного градиента давления. Это - первые вихревые образования после градиентных волн.



Рис. 1 Схема формирования турбулентности

На рис. 1 представлена схема течения вблизи стенки. Цифрами последовательно обозначены режимы течения: 1 - ламинарный поток; 2 - поток в виде волн Толмина-Шлихтинга; 3 - градиентные волны Кельвина-Гельмгольца; 4 - продольные вихри Тейлора-Гертлера; 5 - торсионные жгуты. Справа от схемы условно с помощью поясняющей вставки показаны следы от торсионных жгутов.

На рис. 2 приведены фотографии, иллюстрирующие динамику развития турбулентности в экспериментах по разгону модельного сопла РДТТ в направлении от камеры к срезу. В соплах РДТТ из-за конфигурации канала течение меняется и часто возникает на пути этих вихрей безградиентное течение $\text{grad} P = 0$. Это приводит к попарному скручиванию вихрей - торсионному движению. В последующем в сверхзвуковом потоке, при его расширении ($\text{grad} P < 0$) эти жгуты "расплетаются" (поз. 6 на рис. 2) и далее образуется сетка сверхзвуковых характеристик (поз. 7 на рис. 2). Сущность метода уноса массы заключается в использовании в качестве стенок легко уносимых полимеров, наилучшим из которых является фторопласт-4. Работая в высокоэнтальпийном потоке, стенка разрушается по законам линейного пиролиза. Конвективные потоки при этом имеют различные турбулентные конфигурации: вихри, жгуты и т.д. Эти потоки оставляют на стенке рельефные следы, такие как: продольные цилиндрические углубления, наплывы в виде морских волн и более сложные отпечатки. От торсионных жгутов остаются следы в виде чередующихся ячеистых структур с размером ячейки, равным диаметру продольного вихря.

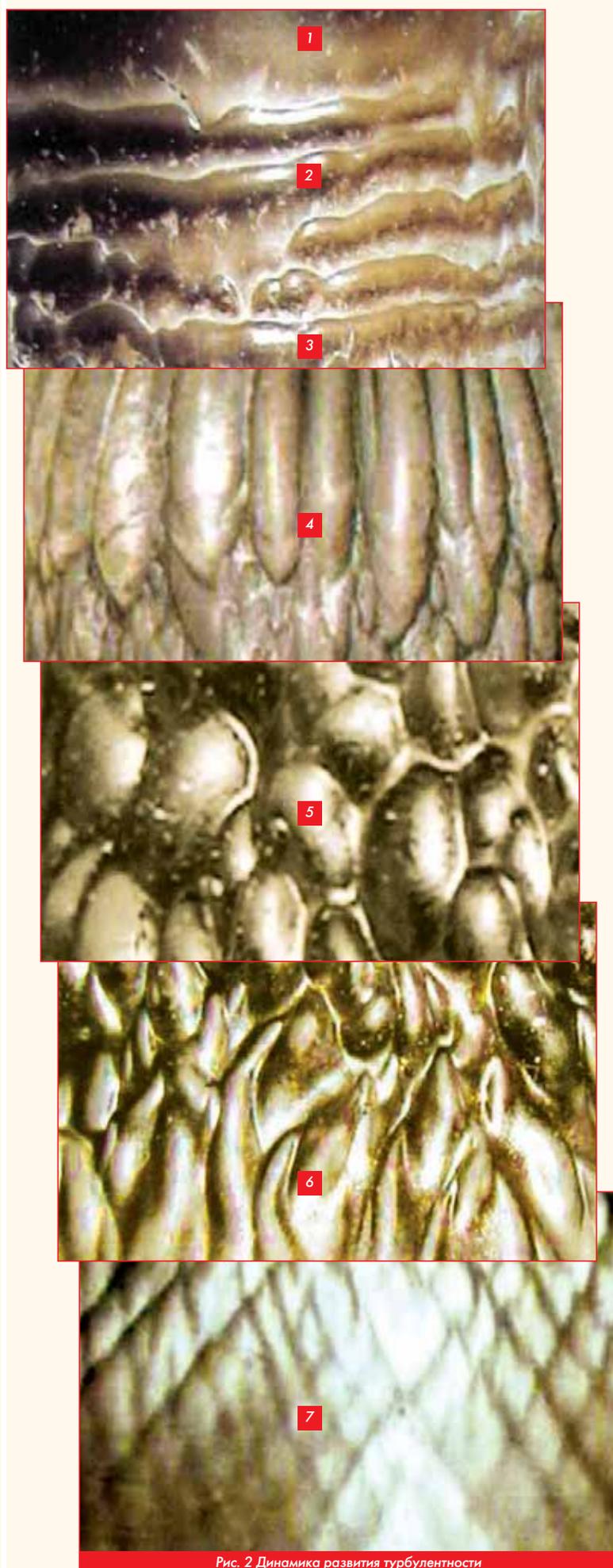


Рис. 2 Динамика развития турбулентности

Таким образом, турбулентность, которую предсказывал О. Рейнольдс для трубы, является лишь началом переходного периода течения, а основная турбулентность в виде вихрей начинается с возникновения градиентных ($\text{grad}P > 0$) течений.

Выводы из теоремы № 5

Из теоремы № 5 о невозможности существования турбулентности в сверхзвуковом потоке следуют несколько практических приложений. Использование теоремы существенно упрощает процедуру расчета благодаря переходу в области сверхзвука к ламинарным уравнениям движения. При этом особенности с турбулентностью, в этих уравнениях исключаются. Теорема № 5 позволяет существенно упростить решение следующих задач:

1. В соответствии с векторным уравнением для ламинарных течений [2] упрощается получение газового поля в соплах ЖРД. При этом постановка задачи осуществляется корректно с привлечением реальных граничных условий прилипания и сопровождения.

2. Аналогичное уравнение получается для определения неравновесных реальных потоков в сверхзвуковых соплах ЖРД и РДТТ [11]. В уравнение добавляется еще один член, отражающий закон действующих масс.

3. С помощью уравнения для ламинарных течений возможно корректно решать задачу пограничного слоя вдоль образующей всего двигателя. Записываются точные уравнения для определения градиента скорости на стенке [12].

4. Имея точное поле течения вязкого сжимаемого газа, возможно правильно профилировать сопла методом послойной оптимизации [12].

5. Важным практическим результатом является то, что с помощью этой теоремы можно достаточно просто рассчитывать двухфазные потоки, характерные для РДТТ. Мало того, что расчеты этих потоков базируются на простых ламинарных уравнениях, также учитывается и то, что сами процессы коагуляции и дробления, происходящие с частицами за критическим сечением, прекращаются [13], а спектр частиц становится моноспектром с одним единственным размером. Для штатных топлив этот размер примерно составляет 5 мкм. В этом случае задача сводится к траекторной и возможно её аналитическое продолжение по определению плотности тока осаждения частиц на концевую часть сопла. □

Литература

1. Ю.М. Кочетков. Устойчивость пристенных течений в соплах РДТТ // Двигатель №6, 2002.
2. Ю.М. Кочетков. Турбулентность сверхзвуковых течений. Памяти Гилевича // Двигатель №2, 2013.
3. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Вектор Навье-Стокса // Двигатель №6, 2014.
4. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Вывод уравнения импульсов из начал термодинамики // Двигатель №3, 2016.
5. Г.В. Липман, А. Рожко. Элементы газовой динамики // М. Издательство иностранной литературы, 1960.
6. В.П. Стулов. Лекции по газовой динамике // М. Физматлит, 2014.
7. Ю.М. Кочетков. Турбулентность и солитоны // Двигатель №2, 2005.
8. Ю.Г. Демянко, А.А. Павельев, Г.В. Конюхов. Ядерные ракетные двигатели // М. ООО "Норминформ", 2001.
9. Н.Ю. Кочетков, Ю.М. Кочетков. Турбулентность в РДТТ. Разделительные линии // Двигатель №4, 2010.
10. Ю.М. Кочетков. Турбулентность без градиентов // Двигатель №5, 2006.
11. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Неравновесные пристенные течения в двигателях летательных аппаратов // Двигатель №1, 2018 г.
12. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Фундаментальное уравнение сверхзвуковой газовой динамики и новый метод профилирования сопел ЖРД // Двигатель №3, 2015 г.
13. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Опыты Куренкова и фундаментальные уравнения двухфазной газовой динамики сверхзвуковых сопел // Двигатель №2, 2015 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com