

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

НЕРАВНОВЕСНЫЕ ПРИСТЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ДВИГАТЕЛЯХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Записано в дифференциальной форме неравновесное уравнение движения в пределе, переходящее в уравнение Навье-Стокса. Для пристенной вязкой области записано уравнение движения в неравновесной постановке, позволяющее решать задачи теплообмена и вязкого трения на поверхностях стенок камер и сопел ракетных двигателей. It is written in the differential form of a nonequilibrium equation of motion in the limit passing into the Navier-Stokes equation. For the near-wall viscous region the equation of motion in nonequilibrium formulation that allows to solve problems of heat transfer and viscous friction on the surfaces of the walls of the chambers and nozzles of rocket engines.

Ключевые слова: турбулентность, неравновесность, энтропия.
Keywords: turbulence, non-equilibrium, entropy.

Как было показано ранее [1, 2], уравнение Навье-Стокса, строго говоря, справедливо для случая замороженного течения. Оно было выведено в предположении неизменности малого объема газа, его свойств и предполагало решение исключительно для центра масс. Такое решение не нарушало общности, так как принципиальным является для материальной точки. Для нее (точки) не важно, где приложена скорость (импульс) - в центре масс или на периферии этой точки. Поэтому газовое поле для последнего случая будет неизменным. Но при решении самого уравнения, где требуется еще два условия, уравнение неразрывности и уравнение энергии, это принципиально. Внутри материальной точки может нарушаться второй закон термодинамики и тогда полная система уравнений сохранения даст неправильный результат. Кроме того, решение уравнения движения Навье-Стокса никак не предполагает так называемого равновесного решения термодинамической системы. И тем более неравновесного случая, который реально присутствует в течении потоков двигателей летательных аппаратов и энергетических установок. Уравнение Навье-Стокса не включает в свою систему закона действующих масс, который всегда, неминуемо сопровождает неравновесные процессы. Типичной ошибкой считается расчет уравнения Навье-Стокса по равновесным, либо осредненным параметрам. Практически никак не доказано то, что поток является равновесным, да и может ли он быть равновесным. Ведь скорость химической реакции, равная бесконечности, это всего лишь математическая абстракция. Какая-никакая большая, но не бесконечная. И второе: логично ли вставлять в замороженную конструкцию уравнения равновесные значения? Ведь отличие значений свойств для замороженного и равновесного случая - разы.

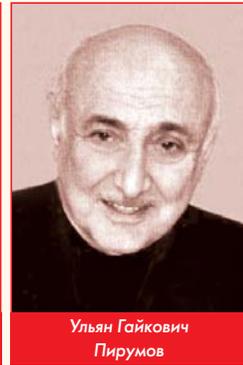
И еще! Какие задачи мы решаем с помощью уравнений движения в практической деятельности? Это - устойчивость в ЖРД, определение интегральных характеристик двигателя (импульс, тяга...) и, главное, теплообмен со стенкой. Именно последняя задача пограничного слоя является самой сложной. Задача является сопряженной и идеализировать эту область (пристенное течение) не всегда правомерно. Эта задача нестационарная, вязкая, сжимаемая, а главное - неравновесная. Вот почему актуализировать ее самое время. Да, сегодня разработано много методов и программ, среди которых можно выделить работы В.К. Кошкина, У.Г. Пирумова, А.М. Молчанова, В.Ю. Гидасова и большинство из них не безупречно. Поэтому важным будет подход, который, акцентировав недостатки предыдущих работ, даст возможность получить уравнения, не страдающие ими. Получим еще раз более аккуратно уравнения движения, исходя из начал термодинамики [3]. При этом в выводах воспользуемся для удобства новыми преобразованиями и выражениями.



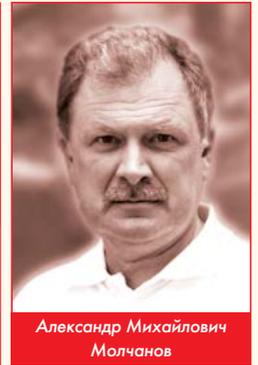
Валентин Константинович Кошкин



Владимир Юрьевич Гидасов



Ульян Гайкович Пирумов



Александр Михайлович Молчанов

Вывод неравновесного уравнения движения

Как уже было сказано, будем исходить из классических Начал термодинамики и опираться на опыт, наработанный в последние годы в этом направлении. Прежде всего воспользуемся соотношением четвертого начала термодинамики.

Итак, записываем 1-е и 2-е начало термодинамики с учетом внутренней и внешней энергии:

$$\text{grad}Q = \text{grad}U + P\text{grad}V + \text{grad}Q_{\text{внеш}} - \text{grad}Q_{\text{внутр}}$$

Внутренний поток имеет отрицательный знак, так как он уходит в стенку.

Для удобства представим два правых члена в следующем виде:

$$R_{\mu}T\text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} - \frac{1}{\rho} \text{div}\Pi.$$

Последний член - энергия касательных сил, записан в форме Коши.

Преобразуем второй член после равенства с помощью преобразования Лежандра:

$$P\text{grad}V = P\text{grad} \frac{1}{\rho} = \text{grad} \frac{P}{\rho} - \frac{1}{\rho} \text{grad}P.$$

Уравнение домножим на ρ^2 , чтобы в дальнейшем воспользоваться четвертым началом термодинамики:

$$\rho^2\text{grad}Q = \rho^2\text{grad}U + \rho^2\text{grad} \frac{P}{\rho} - \rho\text{grad}P + \rho^2R_{\mu}T\text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} - \rho\text{div}\Pi.$$

Вновь применив преобразования Лежандра для первого члена, после равенства получим:

$$\rho^2\text{grad}U = \text{grad}\rho^2U - U\text{grad}\rho^2.$$

После чего получим:

$$\rho^2\text{grad}Q = \text{grad}\rho^2U - U\text{grad}\rho^2 + \rho\text{grad} \frac{P}{\rho} - \rho\text{grad}P + \rho^2R_{\mu}T\text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} - \rho\text{div}\Pi.$$

Далее, воспользовавшись математической формулировкой четвертого начала термодинамики, запишем основное уравнение:

$$\rho^2\text{grad}Q = \rho \frac{d\rho^2U}{d\tau} - U\text{grad}\rho^2 + \rho\text{grad} \frac{P}{\rho} - \rho\text{grad}P + \rho^2R_{\mu}T\text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu}T} - \rho\text{div}\Pi.$$

Сокращаем на плотность

$$\rho \text{grad} Q = \frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} \frac{U}{\rho} - \text{grad} p^2 + \rho \text{grad} \frac{P}{\rho} - \text{grad} P + \rho R_{\mu} T \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu} T} - \text{div} \Pi.$$

Раскрываем градиенты 2-го и 3-го членов после равенства:

$$\rho \text{grad} Q = \frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} - 2U \text{grad} \rho + \text{grad} P + \rho \cdot P \cdot \text{grad} \frac{1}{\rho} - \text{grad} P + P \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu} T} - \text{div} \Pi.$$

Преобразуем 3-й член справа от равенства:

$$\rho \text{grad} Q = \frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} - 2U \text{grad} \rho + \frac{P}{\rho} \text{grad} \rho + P \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu} T} - \text{div} \Pi.$$

Далее:

$$\rho \text{grad} Q = \frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} - \left(2U \text{grad} \rho + \frac{P}{\rho} \text{grad} \rho \right) + P \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu} T} - \text{div} \Pi.$$

Вводим энтальпию $H = U + P/\rho$:

$$\rho \text{grad} Q = \frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} - (U + H) \text{grad} \rho + P \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu} T} - \text{div} \Pi.$$

Или, вводя энтропию:

$$\rho T \text{grad} S = \frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} - \frac{k+1}{k-1} R_{\mu} T \text{grad} \rho + P \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu} T} - \text{div} \Pi.$$

Далее приводим к традиционному виду уравнение импульсов (движения):

$$\frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} = \text{div} \Pi + \rho T \text{grad} S + \frac{k+1}{k-1} R_{\mu} T \text{grad} \rho - P \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu} T}$$

Делаем еще одно преобразование со вторым и третьим членом после равенства:

$$\frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} = \text{div} \Pi + P \text{grad} \frac{ST}{R_{\mu} T} + \frac{k+1}{k-1} R_{\mu} T \text{grad} \rho - P \text{grad} \frac{Q_p}{R_{\mu} T}.$$

Или:

$$\frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} = \text{div} \Pi + P \text{grad} \ln e^{\frac{ST}{R_{\mu} T}} + P \text{grad} \ln \rho^{\frac{k+1}{k-1}} - P \text{grad} \ln e^{\frac{Q_p}{R_{\mu} T}}.$$

Объединим последние три члена под логарифмом:

$$\frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} = \text{div} \Pi + P \text{grad} \ln \rho^{\frac{k+1}{k-1}} e^{\left(\frac{Q_p - ST}{R_{\mu} T} \right)}.$$

Сделаем еще одно преобразование

$$\frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} = \text{div} \Pi + P \text{grad} \ln \left(\frac{\rho^{\frac{k+1}{k-1}}}{(R_{\mu} T)^{\frac{k+1}{k-1}}} e^{\left(\frac{Q_p - ST}{R_{\mu} T} \right)} \right).$$

Последнее уравнение можно считать неравновесным уравнением движения.

Преобразования химического потенциала

Химическим потенциалом φ вещества называют удельный (в расчете на единицу массы) изобарно-изотермический потенциал Гиббса [4]:

$$\varphi = h - Ts,$$

где h и s - удельная энтальпия и энтропия.

Найдем общие зависимости для главных термодинамических потенциалов Гиббса G , Гельмгольца F , энтальпии H и внутренней энергии U .

На примере изохорно-изотермического потенциала Гельмгольца запишем, учитывая аддитивность функции:

$$F = M \cdot f,$$

где M - масса (молекулярная масса) и f - удельная свободная энергия $f = u - Ts$. Тогда:

$$df = du - Tds - sdT \text{ или } df = -Pdv - sdT.$$

В силу аддитивности объема имеем $M \cdot v = V$,

где V - объем системы; v - удельный объем.

После преобразований получаем:

$$dF = (f + pv)dM - PdU - sdT.$$

Поскольку изохорно-изотермический потенциал предполагает постоянство объема и температуры, получаем:

$$dF = (f + pv)dM.$$

Но значение в скобках - это именно химический потенциал:

$$F + pv = \varphi.$$

Тогда получаем:

$$\left(\frac{dF}{dM} \right)_{V,T} = \varphi.$$

Этот результат является неожиданным.

Получено, что при изменении количества вещества в изохорно-изотермической системе значение свободной энергии F всей системы изменяется пропорционально удельному изобарно-изотермическому потенциалу φ , а не величине f , как более естественно было бы ожидать.

Если провести аналогичные преобразования для систем, в которых $p = \text{const}$ и $T = \text{const}$, $p = \text{const}$ и $S = \text{const}$, $U = \text{const}$ и $S = \text{const}$, то можно получить следующие равенства:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial M} \right)_{p,T} = \left(\frac{\partial F}{\partial M} \right)_{V,T} = \left(\frac{\partial H}{\partial M} \right)_{p,S} = \left(\frac{\partial U}{\partial M} \right)_{V,S} = \varphi.$$

Таким образом химический потенциал φ является универсальной термодинамической характеристикой и играет важную роль в химически неравновесных процессах.

Преобразование неравновесного члена в уравнении движения

Полученное уравнение для описания неравновесного движения содержит под экспонентой член вида:

$$- \left(\frac{Q_p - ST}{R_{\mu} T} \right).$$

По существу, это есть один из потенциалов, отнесенный к молекулярному большому потенциалу $R_{\mu} T$ [5].

Если теперь по аналогии с преобразованиями предыдущего раздела перейти к удельным значениям, то становится по существу неважным как позиционировать Q_p .

Введем универсальную газовую постоянную вместо молярной $R = \mu \cdot R_{\mu}$, тем самым приведем числитель в значение для моля, и сам числитель будет по существу химическим потенциалом φ . Часто в литературе [6] последний член пишут в форме Аррениуса, тогда уравнение движения запишется следующим образом:

$$\frac{d\bar{\rho}v}{d\tau} = \text{div} \Pi + \frac{k+1}{k-1} P \text{grad} \ln \left(\frac{P}{(R_{\mu} T)} e^{\frac{\varphi - ST}{R_{\mu} T}} \right).$$

Далее выстроим следующую конструкцию:

1. Умножим и разделим круглую скобку на число $e^{-2,72}$;

2. Умножим и разделим предэкспонент на:

$$\frac{k+1}{k-1} E;$$

3. Введем вновь вместо R_{μ} универсальное число R ;

4. Обозначим числом

$$\xi = \frac{T}{\left(\frac{k+1}{k-1} R \right)}$$

и поместим ξ в предэкспонент и под экспоненту. Получим значение под $\text{grad} \ln$:

$$\frac{k+1}{k-1} R \cdot \frac{P}{e \cdot E} \cdot \frac{1}{R_{\mu} \xi} \cdot e^{1 - \frac{1}{\xi}}.$$

Последний двучлен известен как зависимость $\psi(\xi)$ [7]:

$$\psi = \frac{1}{\xi} e^{1 - \frac{1}{\xi}}.$$

Это нормальная функция насыщения. Далее учитывая, что

константа в круглых скобках последнего соотношения под gradln пропадает, получаем уравнение в виде:

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau} = \text{div}\Pi + \frac{k+1}{k-1} P \text{gradln} \frac{P}{R_{\mu}} \cdot \psi(\xi).$$

Теперь очевидно, что значение под логарифмом есть ни что иное как константа равновесия. Тогда окончательно записываем уравнение движения для неравновесного случая:

$$\frac{d\bar{v}}{d\tau} = \text{div}\Pi + \frac{k+1}{k-1} P \text{gradln} K_p.$$

Из полученного уравнения следует, что при замороженном течении второй член справа превращается в ноль и тогда само уравнение превращается в уравнение Навье-Стокса. В форме Коши [8] оно имеет следующий вид:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{d\tau} = \text{div}\Pi.$$

Уравнение движения для неравновесного пристенного течения

Записывая уравнение Навье-Стокса в традиционной форме теперь уже с учетом неравновесного члена получаем:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{d\tau} = -\text{grad}P + \mu \Delta \bar{v} + \frac{1}{3} \mu \text{graddiv}\bar{v} + \frac{k+1}{k-1} P \text{gradln} K_p.$$

Раскрывая субстанциональную производную и лапласиан скорости получаем:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{d\tau} + \rho \text{grad} \frac{\bar{v}^2}{2} + \rho [\text{rot}\bar{v} \times \bar{v}] + \text{grad}P - \frac{4}{3} \mu \text{graddiv}\bar{v} + \mu \text{rotrot}\bar{v} - \frac{k+1}{k-1} P \text{gradln} K_p = 0.$$

Далее учитывая, что вблизи стенки по всей образующей двигателя стелется ламинарный подслои, избавляемся от роторов и ро-

тор-роторов. Тогда получаем

$$\rho \frac{d\bar{v}}{d\tau} = -\text{grad} \left(P + \frac{4}{3} \mu \frac{d\rho}{d\tau} \right) + P \text{gradln} K_p^{\frac{k+1}{k-1}}.$$

Именно это уравнение в совокупности с условием прилипания на стенке и условием сопровождения на оси двигателя определяют вязкое сжимаемое течение неравновесного потока продуктов сгорания по тракту двигателя. **■**

Литература

1. В.А. Князев. Гидромеханика без гипотезы псевдоотвердевания жидкой точки. Изд. LAP LAMBERT Academic Publishing, Германия, 2014.
2. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Вывод уравнения импульсов из начал термодинамики // Двигатель №3, 2016.
3. Ю.М. Кочетков. Турбулентность реальных газов. Благородное уравнение газовой динамики // Двигатель №1, 2017.
4. В.А. Кириллин, В.В. Сычев, А.Е. Шейндлин. Техническая термодинамика // М. Энергоатомиздат, 1983.
5. В.В. Сычев. Дифференциальные уравнения термодинамики // М. Наука, 1981.
6. У.Г. Пирумов, Г.С. Росляков. Газовая динамика сопел // М. Наука, 1990.
7. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Закон пси от кси // Двигатель №2, 2017.
8. Дж. Серрин. Математические основы классической механики жидкости // М. изд. Иностранной литературы, 1963.
9. А.М. Молчанов. Математическое моделирование гиперзвуковых гомогенных и гетерогенных неравновесных течений при наличии сложного радиационно-конвективного теплообмена // М. МАИ, 2017.
10. В.Ю. Гидаспов, Н.С. Северина. Некоторые задачи физической газовой динамики // М. МАИ, 2016.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com

P.S. Автор статьи "Турбулентность. Реновация второго начала и новый идеальный цикл", опубликованной в № 5, 2017 г., приносит извинения редакции, читателям и предлагает более корректное объяснение низких значений показателей адиабаты "k" в продуктах сгорания топлив РДТТ. Значения "k" могут зависеть от двух причин. Во-первых, высокой степени свободы молекул, что предполагает их большие и разветвленные структуры, и во-вторых, большой молекулярной массы. Судя по термодинамическим расчетам, где, в основном, в продуктах сгорания присутствуют

молекулы углекислого газа и воды, большие и разветвленные цепочки радикалов, продуктов первичного преобразования компонентов смесового твердого топлива, неустойчивы и быстро разваливаются. А вот добавленная присадка металлического алюминия в топливо дает высокие значения молекулярной массы конденсированных частиц окиси алюминия.

Исправления не влияют на общие выводы статьи.

Автор благодарит Анатолия Петровича Тишина за ценное замечание.

ИНФОРМАЦИЯ

Термоэлектрические генераторы (ТЭГ) известны давно и являются перспективной технологией получения электрической энергии из тепла, выбрасываемого в окружающую среду, например, с выхлопными газами автомобилей или ПТУ.

ТЭГ вырабатывают электрический ток при условии, когда их одна сторона нагрета сильнее, чем другая, причём все существующие ТЭГ работают только на высоких температурах. Однако, недавно специалистам из университета Осаки совместно с инженерами компании Hitachi удалось получить новый материал, способный эффективно работать при низких, "комнатных" температурах.

Исследователи соединили кремний с иттербием и получили силицид иттербия (YbSi₂). Большинство соединений иттербия хорошо проводят электричество и силицид иттербия не является токсичным материалом. Кроме этого, материал обладает уникальным свойством, называемым колебани-

ями валентности. Дело в том, что часть атомов иттербия, входящих в состав YbSi₂, имеют валентность +2, а другая часть - +3. При этом в материале постоянно происходит "колебательный эффект", называемый резонансом Кондо, когда валентность атомов начинает изменяться от одного значения к другому и наоборот. Все это увеличивает значение коэффициента Сибека и обеспечивает достаточно сильный термоэлектрический эффект при комнатной температуре.

Еще одним преимуществом YbSi₂ является его необычная "слоистая" структура. Атомы иттербия формируют кристаллографические плоскости, подобные тем, которые существуют в чистом металле. Атомы же кремния формируют листы с шестигульной решеткой, напоминающие графит, расположенные между кристаллографическими плоскостями иттербия. Такая структура эффективно снижает удельную теплопроводность материала. Ещё большего подавления

теплопроводности можно добиться путем введения в материал дефектов, примесей и создания наноразмерных структур.

Проведённые эксперименты показали, что у нового материала коэффициент мощности при комнатной температуре сопоставим с аналогичным показателем самых эффективных термоэлектрических материалов на основе токсичного теллурида висмута, работающего при всём этом на высокой температуре. Теперь появилась надежда, что в скором времени термоэлектрические генераторы получат широкое применение, а тепловая энергия, ранее выбрасываемая в атмосферу, будет преобразована в электроэнергию, повышая тем самым общий к.п.д. системы. **■**

