

# ГИДРОДИНАМИКА ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ И КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ РОТОРОВ

Юрий Борисович Назаренко, к.т.н.,

ведущий конструктор ОКБ им. А. Люльки - филиал ОАО "УМПО"

**Рассматривается жидкостное трение в подшипниках скольжения на основе гидродинамической теории смазки. На основе определения гидродинамических сил в клиновом зазоре подшипника скольжения устанавливается условие возникновения резонанса в масляном потоке и критические частоты вращения роторов.**

**Considered fluid friction in sliding bearings on the basis of hydrodynamic theory of lubrication. On the basis of the definition of the hydrodynamic forces in the oil wedge of the sliding bearing, the established resonance in the flow and the critical rotational of the rotors.**

**Ключевые слова: подшипник, гидродинамические силы, масляный клин, критическая частота вращения ротора.**

**Keywords: bearing, hydrodynamic forces, oil wedge, critical revolution frequency of the rotor.**

## 1 Введение

При жидкостном трении рабочие опорные поверхности вала (цапфа) и вкладыша (подпятник) разделены слоем масла, толщина которого должна быть больше суммы высот шероховатостей двух поверхностей. При этом реакция ротора на опоре компенсируется гидродинамическими силами масляного потока в клиновом зазоре.

В радиальных подшипниках клиновидная форма зазора свойственна самой конструкции подшипника. Она образуется благодаря смещению центра цапфы вала и вкладыша (рис. 1).

При вращении вала ротора цапфа всплывает в масле и несколько смещается в сторону вращения.

Для определения параметров подшипников роторов в режиме жидкостного трения рассмотрим основы теории гидродинамики.

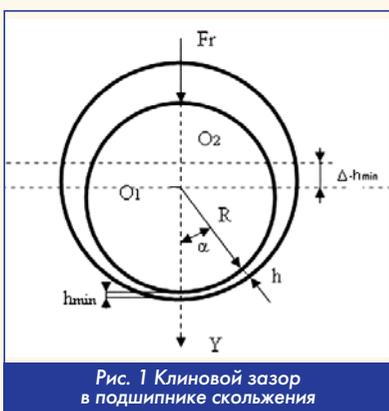


Рис. 1 Клиновидный зазор в подшипнике скольжения

## 1 Гидродинамика вязкой жидкости при ламинарном течении масла между двух пластин

Исследование режима жидкостного трения в подшипниках основано на гидродинамической теории смазки. Эта теория базируется на решениях дифференциальных уравнений гидродинамики вязкой жидкости, которые связывают давление, скорость и сопротивление вязкому сдвигу [1-2].

При движении жидкости между двумя пластинами, одна из которых нагружена силой  $F$ , при определенном наклоне пластины и скорости потока  $V$  возникает давление со стороны потока, которое компенсирует вертикальную силу (рис. 2).



Рис. 2 Течение жидкости между двумя пластинами

При ширине пластины гораздо больше ее длины сложную пространственную задачу можно свести к плоской в координатах  $x$ - $y$ .

Основным уравнением, определяющим движение потока жидкости в сужающемся канале, является закон Ньютона

$$\tau = \mu dV/dy, \tag{1}$$

где  $\tau$  - напряжения сдвига от внутреннего трения при сдвиге слоев жидкости;  $\mu$  - динамическая вязкость жидкости;  $V$  - скорость течения.

Продифференцируем обе части уравнения (1)

$$\frac{d\tau}{dy} = \mu \frac{d^2V}{dy^2}. \tag{2}$$

Так как на одной границе поверхности пластины скорость равна нулю, то различные слои потока имеют разную скорость и между ними имеется градиент по оси "y", а за счет сужения канала имеется градиент давления по оси "x".

Рассматривая равновесие элементарного объема в виде

$$dp \cdot dy = -d\tau \cdot dx$$

и подставляя

$$d\tau/dy = -dp/dx$$

в (2) будем иметь основное уравнение гидродинамики для установившегося двумерного течения жидкости

$$\frac{d^2V}{dy^2} = G/\mu, \tag{3}$$

где  $G$  - градиент избыточного давления в зазоре,  $G = -dp/dx$ .

Интегрируя дважды, получаем

$$V = \frac{Gy^2}{2\mu} + C_1y + C_2. \tag{4}$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  найдем из граничных условий при задании скоростей на границах пластин. Верхняя пластина набегаем на жидкость со скоростью  $V$  и прогоняет ее через сужающийся зазор.

Окончательно получаем

$$V = -\frac{Gy}{2\mu}(h-y) + \frac{Vy}{h}, \tag{5}$$

где  $h$  - текущая толщина слоя масла в зазоре.

Объемный расход на единицу ширины пластины равен

$$Q = \int_0^h V dy = -\frac{Gh^3}{12\mu} + \frac{Vh}{2}. \tag{6}$$

Из условия неразрывности потока жидкости значение  $Q$  не должно зависеть от "x" (во всех сечениях зазора  $Q$  постоянно).

Из (6) следует, что градиент давления  $G$  должен определяться из условия

$$\frac{dp}{dx} = -G = 6\mu \left( -\frac{V}{h^2} + \frac{2Q}{h^3} \right). \tag{7}$$

Учитывая  $h = h_1 - \alpha x$ , где  $\alpha$  - угол наклона верхней пластины, после интегрирования в пределах от  $h_1$  до  $h$  и граничном условии  $p = 0$  при  $h = h_1$  будем иметь

$$P = -\frac{6\mu}{\alpha} \left[ V \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{h_1} \right) - Q \left( \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) \right]. \tag{8}$$

## 2 Гидродинамические силы в подшипниках скольжения

Максимальное гидродинамическое давление при движении потока масла по часовой стрелке формируется в двух четвертях щелевого зазора. В квадранте сужения зазора ( $0 < \alpha < \pi/2$ ) от оси  $X$  и до оси  $Y$  и в квадранте расширения зазора ( $-\pi/2 < \alpha < 0$ ) от оси  $Y$  до  $X$  (рис. 1).

Толщину зазора для четверти круга от зазора на оси  $X$ , рав-

ного  $\Delta$  и до минимального  $h_{\min}$  в квадранте сужения принимаем линейной, и она составит

$$\xi = [\Delta - h_{\min}] \cdot \frac{\alpha}{\pi/2} + h_{\min}, \quad (9)$$

где  $\Delta$  - смещение центра вала и внутреннего радиуса вкладыша подшипника;  $h_{\min}$  - минимальный зазор на рабочих режимах.

Для определения давления в клиновом зазоре из выражения (8) установим объемный расход жидкости на единицу пластины.

Из условия неразрывности потока жидкости значение  $Q$  не должно зависеть от "х" (во всех сечениях зазора  $Q$  постоянно). В сечении, совпадающем с максимумом давления  $dP/dx = G = 0$ . При этом, согласно уравнению (5), скорость в этом сечении изменится по линейному закону пропорционально "у".

Максимальное значение давления будет в самом узком месте канала при  $h_{\min}$ . Тогда получаем значение расхода жидкости в самом узком сечении канала, которое будет постоянно во всех сечениях клинового зазора

$$Q = V \cdot h_{\min} / 2, \quad (10)$$

где  $V$  - окружная скорость цапфы вала.

Подставляя расход потока (10) в (8), запишем давление в клиновом зазоре для элементарного элемента дуги  $dL = R d\alpha$

$$P = \frac{6\mu V}{\beta} \left[ \left( \frac{1}{h_1 - R d\alpha \beta / 2} - \frac{1}{h_1} \right) - \frac{h_{\min}}{2} \left( \frac{1}{(h_1 - R d\alpha \beta / 2)^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) \right], \quad (11)$$

где  $\beta$  - угол наклона верхней пластины клинового зазора относительно нижней.

Раскладывая в ряд Тейлора выражение (11) и пренебрегая величинами малого порядка малости, будем иметь давление на единичном участке клинового зазора

$$P = \frac{6\mu V}{\beta} \left[ \frac{R\beta \cdot d\alpha}{1} \cdot \left( \frac{1}{2h_1^2} - \frac{h_{\min}}{2h_1^3} \right) \right] = \frac{3\mu \cdot V \cdot R d\alpha}{1} \cdot \left( \frac{1}{\zeta^2} - \frac{h_{\min}}{\zeta^3} \right). \quad (12)$$

Интегрируя выражение (12) в интервале от оси "X" и до текущего значения  $\alpha$ , получим значение давления для любого сечения клинового зазора

$$P(\alpha) = \lambda \int_0^\alpha \left( \frac{1}{\zeta^2} - \frac{h_{\min}}{\zeta^3} \right) d\alpha, \quad (13)$$

где  $\lambda$  - параметр, определяемый из соотношения,  $\lambda = 3\mu VR$ .

Произведя интегрирование и после преобразования выражения (13) будем иметь

$$P(\alpha) = \frac{\lambda}{\eta^2} \left[ \frac{1}{\left( \alpha + \frac{h_{\min}}{\eta} \right)} - \frac{1}{\left( \frac{\pi}{2} + \frac{h_{\min}}{\eta} \right)} \right] - \frac{\lambda h_{\min}}{2\eta^3} \left[ \frac{1}{\left( \alpha + \frac{h_{\min}}{\eta} \right)^2} - \frac{1}{\left( \frac{\pi}{2} + \frac{h_{\min}}{\eta} \right)^2} \right], \quad (14)$$

где  $\eta$  - параметр, определяемый соотношением,  $\eta = 2(\Delta - h_{\min})/\pi$ .

Оценим распределение гидродинамического давления по длине зазора и максимальные радиальные гидродинамические силы, поддерживающие вал ротора на масляной подкладке.

Пример расчета проведем на модели подшипника скольжения с радиусом цапфы вала  $R = 50$  мм и шириной  $B = 50$  мм. Величину коаксиального зазора принимаем  $\Delta = 0,2$  мм. Окружная скорость цапфы вала составляет  $V = 50$  м/с;  $\mu$  - динамическая вязкость масла при температуре  $100$  °С,  $\mu = 0,0027$  Нс/м<sup>2</sup>.

Распределение гидродинамического давления при минимальной толщине зазора  $h_{\min} = 20$  мкм в интервале  $0 < \alpha < \pi/2$  представлено на диаграмме (рис. 3).

Умножив гидравлическое давление на ширину опор-



Рис. 3 Распределение гидродинамического давления при минимальной величине зазора  $h_{\min} = 20$  мкм

ной зоны клинового зазора и интегрируя его проекцию на ось Y, установим гидродинамическую силу, поддерживающую ротор на опоре

$$F = 2 \int_0^{\pi/2} (1,92\alpha^2 - 5,07\alpha + 3,4) B R \cos\alpha d\alpha = 6911,6 \text{ Н}, \quad (15)$$

где  $B$  - ширина опорной зоны клинового зазора; радиус цапфы.

Радиальная сила ротора, приходящаяся на опору для обеспечения минимального клинового зазора  $20$  мкм, должна быть равна  $F = 6911,6$  Н.

При более высоких значениях радиальных сил ротора величина минимального зазора будет иметь более низкие значения. Так результирующая максимальная гидродинамическая сила в клиновом зазоре подшипника при минимальном клиновом зазоре  $15$  мкм и  $10$  мкм составит соответственно  $F = 8401,6$  Н и  $F = 10913,8$  Н.

### 3 Критические частоты роторов на опорах с подшипниками скольжения

Основными силами, вызывающими резонанс ротора на опоре с подшипником скольжения, будут центробежные силы ротора от смещения оси вала ротора от оси вращения и гидродинамические силы масляного клина, действующие в этом же направлении.

Оценку резонанса ротора на опоре с подшипником скольжения будем производить по приросту центробежной силы при смещении оси вала на опоре по определенному направлению (ось Y) и приросту гидродинамической силы масляного клина при вариации зазора. Определение критических частот вращения будем производить для исходных данных, рассмотренных в предыдущем разделе.

Смещение вала и цапфы при колебаниях ротора будет существенно сказываться на изменении гидродинамических сил только на сегменте  $-1 < \alpha < 1$  рад. На сегментах, расположенных ближе к оси X, гидродинамические силы будут существенно ослабевать, а проекция гидродинамических сил на ось Y при смещении вала в этом же направлении будет дополнительно уменьшаться пропорционально квадрату косинуса угловой координаты рассматриваемого сечения.

Определение гидродинамических сил произведем для одного квадранта X-Y при разбиении длины дуги сектора  $0 < \alpha < 1$  рад на два равных участка.

Гидродинамическое давление в середине клинового зазора  $0,5 < \alpha < 1$  рад для элемента дуги  $\Delta L = 0,5R$ , определим из выражения (8) и оно будет равно

$$P = \frac{6\mu V}{\beta} \left[ \left( \frac{1}{h_2 - 0,5R\beta/2} - \frac{1}{h_2} \right) - \frac{h_{\min}}{2} \left( \frac{1}{(h_2 - 0,5R\beta/2)^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) \right], \quad (16)$$

где  $h_2$  - начальная величина зазора  $h_2 = (\Delta - h_{\min}) 2/\pi + h_{\min}$ .

Давление в клиновом зазоре при вариации зазора  $\Delta h_2$ , гораздо меньшей, чем величина зазора на входе, раскладывая в ряд Тейлора, представим в виде

$$P = \frac{3\mu V}{2} \left( \frac{R(1-\rho)}{(h_2 \pm \Delta h_2)^2} \right) = \frac{3\mu VR(1-\rho)}{2} \left( \frac{1}{h_2^2} \pm \frac{2\Delta h_2}{h_2^3} \right), \quad (17)$$

где  $\rho$  - параметр, определяемый из соотношения

$$\rho = [(\Delta/h_{\min} - 1) 2/\pi + 1]^{-1}.$$

Переменная составляющая проекции гидродинамической силы по оси Y на сегменте клинового зазора  $0,5 < \alpha < 1$  рад запишем в виде

$$F = \frac{3\mu VR^2 B \cdot \cos(0,75)}{1} \left[ \frac{\Delta h(1-\rho) \cdot 0,54}{h_2^3} \right], \quad (18)$$

где  $\Delta h_2$  - вариация ширины зазора на входе сегмента  $0,5 < \alpha < 1$  рад,  $\Delta h_2 = \Delta h \cdot \cos 1,0 = 0,54\Delta h$ ;  $\Delta h$  - виртуальное изменение ширины зазора по оси Y.

Гидродинамическое давление в середине клинового зазора  $0 < \alpha < 1$  рад для элемента дуги  $\Delta L = 0,5R$  при нулевом давлении на входе, определим из выражения (8) и оно будет равно

$$P = \frac{6\mu V}{\beta} \left[ \left( \frac{1}{h_1 - 0,5R\beta/2} - \frac{1}{h_1} \right) - \frac{h_{\min}}{2} \left( \frac{1}{(h_1 - 0,5R\beta/2)^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) \right], \quad (19)$$

где  $h_1$  - начальная величина зазора  $h_1 = (\Delta - h_{\min}) 2 \cdot 0,5/\pi + h_{\min}$ .  
 Раскладывая в ряд Тейлора выражение (19) при малой величине приращения толщины зазора относительно его начальной толщины и пренебрегая величинами малого порядка малости, будем иметь

$$P = \frac{6\mu V}{\beta} \left[ \left( \frac{R\beta/4}{h_1^2} \right) - \frac{\lambda}{2} \left( \frac{R\beta/2}{h_1^2} \right) \right] = \frac{6\mu V}{4} \left[ \left( \frac{R\beta}{h_1^2} \right) (1 - \lambda) \right]. \quad (20)$$

Здесь  $\lambda$  - параметр, определяемый из соотношения  $\lambda = [(\Delta/h_{\min} - 1)/\pi + 1]^{-1}$

Давление в клиновом зазоре определим при вариации толщины зазора  $\Delta h_1$  гораздо меньшей, чем величина зазора на входе, и раскладывая в ряд Тейлора выражение (20), будем иметь

$$P = \frac{3\mu V}{2} \left( \frac{R(1 - \lambda)}{(h_1 \pm \Delta h_1)^2} \right) = \frac{3\mu VR(1 - \lambda)}{2} \left( \frac{1}{h_1^2} \pm \frac{2\Delta h_1}{h_1^3} \right). \quad (21)$$

где  $\Delta h_1$  - вариация зазора на входе сегмента  $0 < \alpha < 0,5$  рад,  $\Delta h_1 = \Delta h \cos 0,5 = 0,88\Delta h$ ;  $\Delta h$  - виртуальное изменение ширины зазора по оси Y.

Первый член выражения (21) определяет статическое положение цапфы вала на опоре при минимальной величине клинового зазора, соответствующей определенной радиальной силе ротора на опоре.

Переменную составляющую гидродинамической силы по оси Y на сегменте клинового зазора  $-0,5 < \alpha < 0,5$  рад с учетом давления на границе сектора  $0,5 < \alpha < 1$  рад, определяемое как уд-

военное давление в середине сектора (18), запишем в виде

$$F = \frac{3\mu VRS \cos(0,25)}{1} \left[ \pm \frac{0,88\Delta h(1 - \lambda)}{h_1^3} \pm \frac{1,08\Delta h(1 - \rho)}{h_2^3} \right], \quad (22)$$

где  $S$  - опорная площадь вкладыша на сегменте  $-0,5 < \alpha < 0,5$ ;  $S = BR$ .

Приравнявая приращение гидродинамической силы по оси Y на сегменте клинового зазора  $-1 < \alpha < 1$  рад приращению центробежной силы  $F = m\omega^2\Delta h$ , определяем критическую круговую скорость вращения ротора на опоре с подшипником скольжения

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{3\mu VR^2B}{m} \left( \frac{0,85(1 - \lambda)}{h_1^3} + \frac{1,44(1 - \rho)}{h_2^3} \right)}, \quad (23)$$

где  $m$  - масса ротора, приходящаяся на опору.

Подставляя в выражение (23) исходные данные для принятого ранее примера расчета и принимая массу ротора, приходящуюся на опору  $m = 100$  кг, определим критическую круговую скорость  $\omega_{кр} = 972,9$  рад и частоту вращения ротора  $f_{кр} = 154,8$  Гц.

Представленная гидродинамическая модель подшипников скольжения позволяет оценивать гидродинамические силы в клиновом зазоре и определять критические частоты вращения роторов. **□**

#### Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: т. IV/Гидродинамика. М.: Наука, 1986. - 736с.
2. Марчук Е.Ю., Назаренко Ю.Б. Динамика роторов и гидродинамика масляного клина подшипников качения газотурбинных двигателей: монография// Москва, 2016. -186с.

Связь с автором: nazarenkojb@rambler.ru



- ▶ **25 лет опыта в разработке, совершенствовании и изготовлении** сложного прецизионного оборудования для электроэрозионной обработки материалов
- ▶ **Все станки ARTA на 100% производятся на заводе НПК «Дельта-Тест» в России** - от механической обработки станин и деталей до сборки станочных модулей, ЧПУ-генераторов и испытаний комплексов
- ▶ **Эффективное применение для широкого спектра задач электроэрозии:** изготовление штампов, прессформ, инструмента, различных специальных изделий, микроэрозионная обработка ультратонкими электродами и многое другое



**НАУЧНО-ПРОМЫШЛЕННАЯ КОРПОРАЦИЯ «ДЕЛЬТА-ТЕСТ»**

РОССИЯ, 141190, МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ, ГОРОД ФРЯЗИНО, ЗАВОДСКОЙ ПРОЕЗД, 4, ТЕЛ.: +7 (495) 995 09 68, +7 (49656) 471 44, 494 55, **WWW.EDM.RU / ARTA@EDM.RU**