

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

ЗАКОН ПСИ ОТ КСИ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Введена универсальная функция, описывающая процессы насыщения – нормальная функция насыщения, которая может быть использована в различных областях, в том числе для описания неравновесных процессов в ракетных двигателях.

С помощью этой функции доказана H-теорема Больцмана и определено понятие энтропии как дисперсии функции распределения.

An universal function describing the saturation processes was found. It is called a normal saturation function and can be used in various fields, including for describing nonequilibrium processes in rocket engines.

With the help of this function, the Boltzmann H-theorem is proved and entropy concept is defined as a dispersion of the distribution function.

Ключевые слова: турбулентность, насыщение, константа Больцмана, энтропия.

Keywords: turbulence, saturation, Boltzmann constant, entropy.

При разработке современных методов расчета с целью прогноза термодинамических, газодинамических, тепловых и других процессов, происходящих в камерах сгорания, соплах, газогенераторах, турбинах и прочих узлах ракетных двигателей ЖРД, РДТТ, ЯРД и других, используются уравнения сохранения. Это – уравнение неразрывности, три уравнения импульсов и энергии. Эти уравнения поставляют для разработчиков и конструкторов поля пяти инвариантов механики сплошных сред: плотности (ρ), трех импульсов по направлениям координат (ρv) и энергии ($\rho v^2/2$). Как правило, эти уравнения получаются феноменологическим путем, путем использования начальных предположений в виде аксиом и закономерностей классической механики. При выводе этих уравнений используется введенное Леонардом Эйлером понятие континуум. То есть при рассмотрении процессов среда предполагается сплошной и текучей.

Насколько оправдан этот подход можно понять, если рассматривать среду не как идеальную, а как реальную, представляющую из себя субстанцию, состоящую из движущихся хаотично мелких дискретных частиц (молекул, атомов...) неважно какого размера, но отличающихся индивидуальными скоростями. Действительно, размер частиц в данной ситуации не так существен по сравнению с расстоянием между частицами и длиной свободного пробега.

Такой молекулярно-физический подход был раскрыт великим австрийским ученым Людвигом Больцманом. Им было получено фундаментальное уравнение молекулярно-кинетической теории, описывающее эволюцию функции распределения частиц в фазовом пространстве в зависимости от времени [1]:

$$\frac{df}{d\tau} = \int (\vec{f}_d \cdot \vec{f}_n - f_d \cdot f_n) d\sigma,$$

где левая часть является субстанциональной производной, а правая – интегралом столкновений. Причем для двух рассматриваемых сортов частиц с функциями распределения f и \vec{f} записываются изменения скоростей после каждого акта соударения. Одни обозначены индексами "д" – до соударения, другие "н" – после;

$d\sigma$ – дифференциал фазового пространства, который записан в сокращенном виде с целью упрощения анализа.

С помощью своего уравнения Больцман доказал преемственность двух подходов к изучению физических процессов статистического молекулярного и феноменологического. А также он определил и доказал следующие фундаментальные понятия физической науки.

1. Ввел понятие статистической энтропии и доказал ее пропорциональность с энтропией термодинамической. Получил численное значение коэффициента пропорциональности (знаменитая константа Больцмана) $k_B = 1,380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, которая является мостиком между молекулярной физикой и термодинамикой.

2. Доказал H-теорему о необратимости процессов и на ее базе с позиций вероятности событий сформулировал второе начало термодинамики.

3. Доказал, что равенство нулю подынтегрального соотношения, соответствует равновесному состоянию системы. Из этого утверждения последовали равновесные функции распределения для скоростей (Максвелла) и энергий (Больцмана).

4. Предопределил переход от статистических переменных к непрерывным. Модификация уравнения в форме Энского позволила перевести его в фундаментальные уравнения газовой динамики: диффузии, импульсов (в форме Навье-Стокса) и энергии. При этом знаменитые фундаментальные уравнения сохранения предстали как следствия уравнения Больцмана.

5. Своим уравнением Людвиг Больцман показал направления и дал эффективный инструмент для изучения переносных свойств вещества: диффузии, вязкости, теплопроводности и электропроводности, а также связанных с этим неравновесных процессов и релаксацией.

Нормальная функция насыщения

Уравнение Больцмана – сложное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных. Кроме того, интеграл столкновений, который задает вероятность рассеяния частиц, зависит от конкретной системы, от типа взаимодействия между частицами и других факторов. Нахождение общих характеристик неравновесных процессов – непростое дело. Поэтому объяснимым является факт упрощения уравнения в целях получения либо конечных решений, либо решений с помощью ЭВМ. Одним из таких упрощений, например, может служить приближение времени релаксации [2]. В этом приближении часто используется модель столкновений Батнагара – Гросса – Крупа (BGK-модель). Время релаксации, входящее в уравнение Больцмана, зависит от скорости частиц, а, следовательно, энергии. Время релаксации всегда можно рассчитать для конкретной системы с конкретными процессами рассеяния частиц.

Помимо этого наиболее простого релаксационного приближения существует много других попыток описать модели столкновений с последующей разработкой на их базе методов расчета уравнения Больцмана. Прежде чем рассмотреть существо еще одной оригинальной модели, рассмотрим свойство очень интересной функции, которая впервые была получена молодым русским ученым, специалистом по гетерогенным процессам окисления углеродных материалов и выгоранию сложных двухсоставных зарядов твердого топлива в составе РДТТ, кандидатом технических наук Николаем Юрьевичем Кочетковым. Эта функция была им получена при решении уравнения В.И. Бояринцева, описывающего процесс разрушения твердых графитовых стенок сопел РДТТ под воздействием

продуктов сгорания смесевых твердых топлив [3]. Как известно, уравнение Бояринцева определяет связь окислительного коэффициента B в зависимости от температуры стенки T_w [4]:

$$\Omega B^2 + \left(\Omega \frac{M_c}{M_{cm}} + 1 \right) B - B_m = 0.$$

В этом уравнении M_c и M_{cm} - молекулярные массы углерода и смеси продуктов сгорания;

B_m - окислительный потенциал (аналог стехиометрического коэффициента);

Ω - быстроменяющаяся функция, являющаяся модификацией закона Аррениуса.

Основная трудность при решении этого уравнения - это расчет

$$\Omega \sim T_w \cdot e^{\frac{E}{RT_w}}.$$

С целью упрощения Н.Ю. Кочетковым была предложена [3] обратная функция $1/\Omega$, отнормированная по температуре. Без учета постоянных коэффициентов эта новая функция была записана в виде:

$$\psi(x) = \frac{1}{x} e^{(1-\frac{1}{x})},$$

где $X = \frac{T_w}{\left(\frac{E}{R}\right)}$ - безразмерная температура.

Здесь E - энергия активации; R - универсальная газовая постоянная.

Введенная таким образом функция приобрела вид кривой насыщения и имеет значения, равные нулю в нуле и единице в единице. Кроме того, ее первые производные в этих точках равны нулю, а в точке $x = 1 - \sqrt{2}/2$ она имеет перегиб. Графически вид этой функции был представлен в предыдущей работе [5]. Эта функция имеет от начала до $x = 0,2$ очень медленный рост. В интервале от $x = 0,2$ до $x = 0,42$ она практически линейна и при $x > 0,42$ она асимптотически приближается к ординате $\psi = 1$ и при $x = 1$ пересекает ее под нулевым углом. Такой вид характерен для кривых, описывающих процесс насыщения. В работе [3] эта функция была названа нормальной кривой насыщения и затабулирована.

Как-то раз один всемирно известный академик не без сарказма сказал, что "наука - это всего лишь "пси от кси", делайте лучше что-нибудь конкретное". В нашем случае эта функция оказалась равной "пси от кс". Для придания её виду "научности", но несколько попирая права автора афоризма, переобозначим эту функцию. Пусть и она будет "пси от кси" (простая перестановка букв):

$$\psi = \frac{1}{\xi} e^{(1-\frac{1}{\xi})}$$

и, как мы посмотрим далее, это окажется удобным при дальнейших выкладках. Думается, что автор на нас не обидится.

Итак, имеем функцию насыщения, в которой под знаком ξ может быть любая безразмерная величина, которая отнесена к своему максимальному значению. Рассмотрим несколько характерных процессов, которые могут описываться с помощью этой функции, и покажем ее универсальность.

Процессы насыщения

Зависимость уноса от температуры стенки

Первым процессом, который может быть описан с помощью функции $\psi(\xi)$, следует считать процесс, который изучал автор этой функции. Это процесс окисления графитовой стенки и последующий линейный унос ее материала в поток. Величина линейного уноса материала напрямую связана с окислительным коэффициентом B :

$$\delta_{ун} = \frac{B \cdot (\alpha/C_p) \cdot \tau}{\rho_w},$$

где α/C_p - коэффициент теплообмена;

τ - время воздействия окислителя на стенку (время работы РДТТ);

ρ_w - плотность углеродного материала (графит, УККМ и др.) стенки.

Из уравнения Бояринцева можно получить связь B с окислительным потенциалом B_m . Эта связь будет содержать нормальную функцию насыщения $\psi(\xi)$:

$$B \sim B_m \cdot \psi(\xi),$$

равно как и связь температуры с величиной линейного уноса.

Неравновесное уравнение импульсов

В работе [6] было получено уравнение импульсов, содержащее релаксационный член, описывающий неравновесное состояние термодинамической системы. Этот член в точности соответствует закону действующих масс и может быть представлен в виде константы равновесия K через функцию $\psi(\xi)$ [5]:

$$K = P \cdot \psi(\xi).$$

Здесь P - давление.

При этом в [5] было показано, что при значении $\xi = 0$ реализуется замороженное течение, а при $\xi = 1$ - равновесное. Промежуточные значения характеризуют процесс релаксации, а сама кривая насыщения может считаться релаксационной. Эти значения $0 < \xi < 1$ для безразмерной координаты могут быть найдены для конкретного газа с помощью формулы:

$$\xi = \frac{T}{\left(\frac{E}{k+1}\right) R}.$$

Отметим, что в первых двух случаях эта функция была получена математически точно, путем преобразования двух законов: Аррениуса и действующих масс. Далее рассмотрим несколько примеров качественного совпадения.

Эксперименты и расчёты

Выход двигателя на режим

Выход ракетного двигателя на номинальный режим работы также может быть описан с помощью кривой насыщения. Действительно, постепенный переход от горения воспламенителя к горению топлива представляет собой также процесс насыщения камеры продуктами сгорания воспламенителя. В зависимости от времени

$$\xi = \bar{\tau} = \tau / \tau_{\text{воспл.}}$$

Можно записать по аналогии без доказательства формулу выхода двигателя на режим:

$$P = P_k \cdot \psi(\xi).$$

При этом значение P_k может быть определено заранее. Оно, как правило, соответствует номинальному давлению в камере в соответствии с ТЗ, а время воспламенения $\tau_{\text{воспл.}}$ как известно, будет зависеть от калорийности воспламенительного состава.

Ударная волна

Скачок уплотнения - это идеальное приближение ударной волны. В действительности толщина ударной волны $\Delta_{уб}$ конечна. Она равна нескольким длинам свободного пробега. Считая ударную волну, как и положено, непрерывно нарастающей, а форму ее, как и положено, в виде кривой насыщения, изменение давления в ней можно описывать с помощью нормальной кривой насыщения;

$$P = P_1 + (P_2 - P_1) \cdot \psi(\xi),$$

где P_1 и P_2 - давление до и после ударной волны;

$\xi = \Delta / \Delta_{уб}$ - относительная координата толщины ударной волны.

На рис. 1 представлены экспериментальные зависимости давления в ударной волне по ее толщине [7].

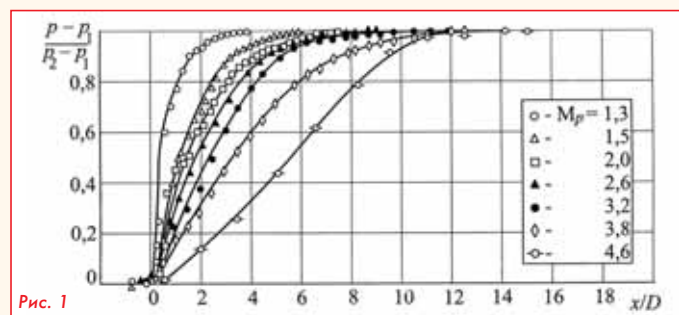


Рис. 1

Матирование стекла

Известен способ матирования стекла пескоструйным аппаратом. Через полупрозрачное стекло еще что-нибудь видно. Матовое стекло рассеивает лучи света и через него не видно четких очертаний. Аналогичная ситуация возникает с лобовым стеклом в самолете. С определенного момента стекло надо менять. Матированным стекло самолета становится при падении каплей жидкости или града в процессе полета самолета [8]. Под действием напряжений, создаваемых соударениями стекол с жидкой и твердой средой, могут образовываться впадины на поверхности, трещины или может начаться механический унос массы материала. Эксперименты показали, что зависимость деградации стекла от длительного воздействия дождя или града носит вид кривой насыщения (рис. 2).



Рис. 2

Характерные особенности этой зависимости повторяют особенности нормальной кривой насыщения. Это - вялый подъем вначале, длительный линейный участок и пологая заваливающаяся конечная часть. Исследования показали, что начальный участок соответствует скрытому (индукционному) периоду разрушения. В этот период поверхность только подготавливается к разрушению. Зарождаются трещины, шероховатости, вмятины. Этому периоду соответствует нелинейность уноса, связанная с неоднородностью процесса по координате охвата поверхности. Причем когда разрушенная поверхность уже подготовлена и практически однородна, наступает линейный (автомодельный) участок. Этот период времени самый продолжительный и характеризуется постоянством скорости уноса. Это период эрозии с постоянной скоростью. По третьему периоду комментарии в цитируемой работе отсутствуют, а для анализа не достаточно приведенного экспериментального материала. Можно только предположить наступление процесса старения поверхности, характеризующегося вялым нелинейным уносом.

Итак, по-прежнему рекомендуется зависимость $\delta_{\text{ун}} \sim \psi(\xi)$.

Кривые выгорания

И еще три процесса, о которых полезно сказать при рассмотрении явления насыщения.

1. Процесс насыщения наблюдается при прокаливании в печи пробы конденсированных частиц с целью выделения чистой α -фазы продуктов сгорания твердого топлива, полученной при отборе ее из потока. При этом выгорание углерода сопровождается увеличением доли Al_2O_3 [9]. Установлено, что рост относительной массы Al_2O_3 от времени прокаливания идет также в соответствии с ростом нормальной кривой насыщения. Присутствует область индукции, линейный участок и конечной завал.

2. Аналогичная ситуация возникает при процессе графитизации в печи при изготовлении углерод-углеродного композитного материала.

В процессе графитизации в печи удаляются "летучие", содержащиеся в препреге в виде затвердевшей массы продуктов разложения фенольно-формальдегидной смолы. По сути, в печи происходит выжигание смолы. Этот процесс также идет по законам насыщения. По ординате - увеличивающийся процент конструкционного углерода, по абсциссе - относительное время выгорания "летучих".

3. Для оценки запасов ВЧ-устойчивости в ЖРД иногда пользуются кривыми выгорания. Кривая выгорания представляет собой

зависимость доли выгоревших компонентов топлива φ от времени их пребывания в камере сгорания. При анализе АФЧХ этих двигателей кривую выгорания, к сожалению, упрощают и делают ступенчатой. Это дает возможность получить классическое решение с так называемым запаздывающим аргументом и в дальнейшем как-то оценить колебательный процесс. Но! На самом деле, при подробном рассмотрении, кривая выгорания представляет собой нормальную кривую насыщения (рис. 3) [10].

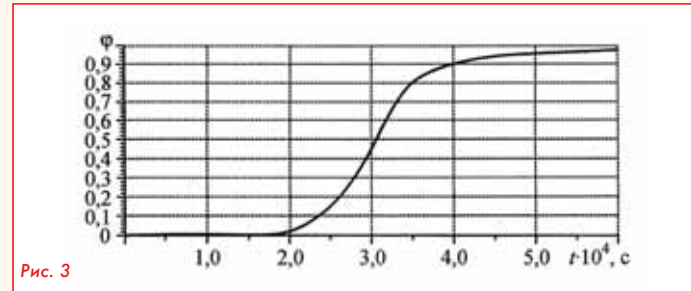


Рис. 3

Она имеет все три характерные области: две области нелинейности (в начале и в конце) и линейную область с постоянной производной. Упомянем также, что и в медицинской практике часто встречаются процессы, связанные с насыщением. Так, например, классическая кривая насыщения гемоглобина крови кислородом имеет вид нормальной функции насыщения (рис. 4).



Рис. 4

Все рассмотренные выше процессы характерны тем, что в них имеется параметр, определяющий в той или иной мере релаксацию. Процесс ограничен максимальным значением этого параметра. При достижении максимального значения этого параметра, процесс завершается. Наступает равновесие. До этого момента происходят изменения, преобразования, движение, потоки. Все рассмотренные выше процессы происходят на микроскопическом уровне. Внутри термодинамической системы возникают движения. Другими словами, внутри этой системы под действием различных градиентов возникают внутренние потоки, которые за время релаксации затухают и система приходит в состояние равновесия. Все эти потоки, очевидно, связаны с потоками энтропии, ее производством. Она, энтропия, объединяет все эти процессы. Рассмотрим это подробно.

Анализ уравнения Больцмана с помощью кривой насыщения

Итак, показано, что кривая "пси от кси" является универсальной и правильно описывает кривую насыщения с физической точки зрения. Эта кривая характеризует релаксационный процесс как общий для всех процессов и связан с молекулярным движением, в том числе с потоками энтропии. Воспользуемся этим фактом и несколько преобразуем уравнение Больцмана.

Предполагаем, что функции распределения находятся вблизи положения равновесия. Представим f и \tilde{f} как:

$$f_a = \tilde{f}_a = f_0,$$

где f_0 - функция распределения Максвелла, соответствующая равновесному состоянию, а

$$f_{\Pi} = f_0 \psi(\tau_{p1});$$

$$\tilde{f}_{\Pi} = f_0 \psi(\tau_{p2}).$$

Причем τ_{p1} и τ_{p2} - времена релаксации, характерные для f и \tilde{f} , соответственно. Тогда подынтегральное выражение в правой части упростится. На основании этого введения по аналогии с [11] запишем уравнение для H-функции Больцмана:

$$\frac{dH}{d\tau} = \int (\tilde{f}_d \tilde{f}_n - f_d f_n) \ln \frac{f_d f_n}{\tilde{f}_d \tilde{f}_n} d\sigma.$$

Выделим подынтегральную функцию.

В новых обозначениях она будет выглядеть так:

$$[f_0 \cdot f_0 \Psi(\tau_{p2}) - f_0 \cdot f_0 \Psi(\tau_{p1})] \ln \frac{f_0 \cdot f_0 \Psi(\tau_{p1})}{f_0 \cdot f_0 \Psi(\tau_{p2})}.$$

Или

$$[f_0^2 \cdot \Psi(\tau_{p2}) \left[1 - \frac{\Psi(\tau_{p1})}{\Psi(\tau_{p2})} \right] \ln \frac{\Psi(\tau_{p1})}{\Psi(\tau_{p2})}.$$

Обозначая через

$$x = \frac{\Psi(\tau_{p1})}{\Psi(\tau_{p2})}.$$

и внося квадратные скобки под логарифм, получаем:

$$[f_0^2 \cdot \Psi(\tau_{p2}) \ln(x \cdot x^{-x})].$$

Поскольку значения функции под логарифмом для действительного аргумента всегда положительны и меньше единицы (рис. 5), то сам логарифм всегда будет отрицательным.

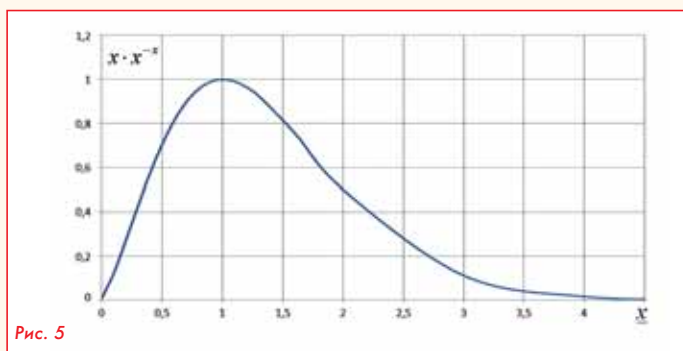


Рис. 5

И поскольку $f_0^2 \cdot \Psi(\tau_{p2})$ всегда больше нуля, то:

$$\frac{dH}{d\tau} < 0.$$

Таким образом, доказываем H-теорему Больцмана, а значит и второе начало термодинамики.

Теперь об энтропии. Поскольку термодинамическая энтропия по определению отождествляется с H-функцией Больцмана, запишем:

$$S = -k_B H = -k_B \ln f.$$

Применив функцию насыщения, получим:

$$S = -k_B \ln f_0 \Psi(\xi).$$

Тогда в случае термодинамического равновесия при

$$\xi = \frac{\tau}{\tau_p} = 1$$

имеем:

$$S_0 = R = -k_B \ln f_0,$$

где R - газовая постоянная.

Но! Внимание! В случае неравновесного состояния в пределе получается $S = -k_B \ln f_0 \Psi(0) = -k_B \ln f(0) = \infty$.

Что это? В пределе получается, что $f = 0$? Как это может быть и может ли это быть вообще? Оказывается, может. Ведь функция f_0 , будучи умноженная на $\Psi(\xi)$, в нуле не имеет точного значения. Функция $\Psi(\xi)$ может только стремиться к нулю, не принимая тождественного значения нуля. Таково свойство функции $\Psi(\xi)$. А значит, есть какая-то бесконечно мало отличающаяся от нуля ордината. Так называется ε -окрестность. Ну и что? А вот что. Свойство функции распределения

$$\int f d\sigma = 1$$

утверждает, что чем больше сама функция, тем меньше аргумент. И наоборот, чем меньше функция, тем больше аргумент. В нашем

случае, поскольку f_0 - это распределение Максвелла, то аргументом является скорость движения частиц. Тогда если $f \rightarrow 0$ (не равна строго, а стремится), то скорость $\rightarrow \infty$. Это означает, что функция распределения расплывается по абсциссе как вода на асфальте (какая-то асфальтовая функция). Сразу введем понятие α -функция. В отличие от δ -функции Дирака, где ордината от матожидания стремится к бесконечности, у этой новой α -функции дисперсия стремится к бесконечности $D \rightarrow \infty$. Поскольку дисперсия функции распределения является параметром, характеризующим рассеяние, становится понятным смысл собственно рассеивания энергии и как следствие увеличения энтропии. Другими словами! Причиной увеличения энтропии является увеличение дисперсии функции распределения, и наоборот, уменьшение дисперсии приводит к локализации самой функции распределения вблизи матожидания, то есть равновесия. В следующей работе будет разобрано, к какой предельной дисперсии стремится величина D. Видимо (только видимо) она стремится к дисперсии функции Максвелла $D \rightarrow D_0$. Итак! Функция $\Psi(\xi)$ является настолько универсальной, что с её помощью можно выявлять весьма фундаментальные процессы природы.

Может быть это закон? А что, закон "пси от кси"? Закон, описывающий естественный процесс насыщения?

Прав был тот самый всемирно известный академик. Вы не забыли? Мы о нем вспоминали в самом начале: наука - это "пси от кси".

Литература

1. Л. Больцман. Лекции по теории газов // М. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
2. Дж. Болд, К. Уотсон, Дж. Уэлч. Физическая теория газовой динамики // М. Мир, 1968.
3. Н.Ю. Кочетков. Разработка и верификация метода и программы расчёта ВБХ РДТТ с двухсоставными зарядами для перспективных ЛА // Космонавтика и ракетостроение № 1 (50), 2010.
4. В.И. Бояринцев, Ю.В. Звягин. Исследования разрушения углеграфитовых материалов при высоких температурах // Теплофизика высоких температур №5, 1975.
5. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Новая интерпретация второго закона термодинамики и теорема векторного анализа о соотношении движений // Двигатель №6, 2016.
6. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Вывод уравнения импульсов из начал термодинамики // Двигатель №3, 2016.
7. О.В. Гуськов, В.И. Копченов, И.И. Липатов. Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах // М. Физматлит, 2008.
8. Дж. С. Спринджер. Эрозия при воздействии капель жидкости // М. Машиностроение, 1981.
9. Ю.М. Кочетков. Дисперсность частиц конденсированной фазы в продуктах сгорания РДТТ // Двигатель №1, 2001.
10. Е.В. Лебединский, Г.П. Калмыков, Д.А. Сидлеров и др. Рабочие процессы в жидком ракетном двигателе и их моделирование. // М. Машиностроение, 2008.
11. Э.Е. Сон. Лекции по физической механике // М. Физматлит, 2010.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com



Кадр из специальной съёмки и последующей обработки изображения струи газа из ракетного двигателя QM-2