УДК 532.526.4

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ ИЗ НАЧАЛ ТЕРМОДИНАМИКИ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

На базе первого и второго законов термодинамики получено новое уравнение импульсов для вязких сжимаемых сред, учитывающее различные механизмы воздействия на термодинамические системы. Анализируется новое слагаемое, полученное при выводе и определяющее кинетический режим.

A new momentum equation for viscous compressible media, taking into account a variety of mechanisms of influence on the thermodynamic systems, have received on the basis of the first and second laws of thermodynamics. We analyze the new summand determining a kinetic mode and obtained as a result of derivation.

Ключевые слова: ***турбулентность, тензор, градиент, дивергенция, кинетика.***

Keywords: ***turbulence, tensor, gradient, divergence, kinetics.***

Газодинамическая наука базируется на трех основных фундаментальных уравнениях сохранения. Это уравнение энергии, уравнение (векторное) движения и уравнение сохранения вещества (неразрывности). Определяющим для практических расчетов является уравнение движения, которое дает для потребления газовое поле, в частности поле скоростей. Остальные два уравнения - энергии неразрывности в общем являются вспомогательными и замыкают общую систему. Дополнительно используют при расчетах уравнение состояния и граничные условия. В настоящее время наиболее адекватным является уравнение Навье-Стокса. Уравнение Леонарда Эйлера и Осборна Рейнольдса в работе [1] были подвергнуты резкой критике и не только одним автором. Тем не менее, уравнение Навье-Стокса, в совокупности с условиями прилипания [2], обладая свойствами "фундаментального закона природы", также страдает некоторыми неточностями, которые необходимо выправить. Эти неточности родились из гипотезы псевдоотвердения жидкой точки. А именно, при выводе были взяты условия постоянства свойств газа в материальной точке (в материальном кубе $dxdydz$). При этом задача, вперемешку с прочностной, решалась для классического случая механики твердого тела. Использовался обобщенный закон Стокса, по сути дела закон Гука о линейности напряжений и скоростей деформации жидкостей. В результате получились уравнения, дающие решение для скоростей центра массы (точки). Вроде бы хорошо! Точка маленькая и она почти совпадает со своим центром масс. Да, это так! На скорость эта гипотеза, можно сказать, не влияет и скорость центра масс в общем, практически, да и теоретически, равна любой скорости внутри этой точки. Но! Проблема заключается в том, что внутри этой точки может реализовываться такая ситуация, когда не будет выполняться второй закон термодинамики. Возникает режим течения с отрицательным производством энтропии. Ведь при выводе уравнения не учитывалось соответствие с законом Клаузиуса. Да и при написании дополнительных уравнений, в частности, уравнения энергии, не рассматривалась вся система уравнений во взаимосвязи. Предполагалось, что термодинамическая система замкнута и работает только первый закон термодинамики. Более того, часто используется прием, когда уравнение энергии просто получают из самого векторного уравнения Навье-Стокса. При этом вектор Навье-Стокса скалярно умножают на абсолютную скорость. Получившееся уравнение в определенных ситуациях вполне может не удовлетворять второму началу термодинамики. Получалось, что уравнение энергии как бы "натягивают" на уравнение движения.

Второй очень важный момент выделяет профессор Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Юлий Дмитриевич Чашечкин: *"Идентифицируемость "элемента жидкости" позволяет проследить за траекторией движения его центра"* [3]. В своих работах Юлий Дмитриевич предлагает в качестве основного параметра поля брать импульс $\vec{j} = \rho \cdot \vec{V}$. Такого же мнения придерживается и Владимир Андреевич Князев: *"Использование модели сплошной среды предполагает, что переменными теории могут быть только полевые переменные, то есть функции точки непрерывного пространства. Такой переменной, например, называется динамический тензор, поток которого на некоторую замкнутую поверхность сплошной среды равен импульсу тела, ограниченного этой поверхностью"* [4]. Другими словами, и в том и другом случае проводится мысль о том, что уравнения движения должны быть записаны относительно вектора $\vec{j} = \rho \cdot \vec{V}$ в отличие от традиционного подхода - $\vec{V}$. Этот факт понятен. Ведь импульс, характеризуя удельный расход, тем самым характеризует некоторую среднюю скорость потока, которую можно реально определить из эксперимента.

И последнее. При получении уравнения импульсов, очевидно, будет логичным с самого начала удовлетворить условия первого и второго законов термодинамики и уже на их основании вывести уравнение движения. При этом придется воспользоваться молекулярно-кинетическим тензором, устанавливающим связь между внутренней энергией частиц внутри материальной точки с производной от импульса потока [5]. Основные положения Эйлера, Навье, ... и Стокса, за исключением гипотезы псевдоотвердения, в процессе вывода не будут изменяться.

Преобразование первого начала термодинамики

При выводе уравнения импульсов из условий соблюдения первого (Ломоносов, Майер, Джоуль) и второго (Клаузиус, Гельмгольц, Гиббс) начал термодинамики будем пользоваться книгой [6], где просто, в доступной форме изложены основные уравнения и объяснены термодинамические потенциалы. Отметим, что термодинамическая система может совершать различные виды работ - это энергия сгорания химического топлива в ЖРД и РДТТ, энергия ТВЭЛа в ЯРД, энергия дуги в плазматроне и прочее. Несмотря на различие физической сущности всех видов работ и теплот их запись структурно будет выглядеть одинаково:

$$dL = dQ_L = \xi \cdot dW.$$

Здесь ξ - внешняя сила, действующая на тело (систему), а W - параметр состояния (координата) системы, сопряженная с силой ξ. Например, если система совершает работу, связанную с увеличением объема системы V (м^3/кг) против сил внешнего давления P (Н/м^2), то можно записать $dL = PdV$.

Выделяя специально работу расширения и не комментируя состав других работ, уравнение первого закона термодинамики в самом общем виде запишем так:

$$dQ = dU + PdV + \xi dW$$

или в градиентной форме:

$$\mathrm{grad}Q = \mathrm{grad}U + P\mathrm{grad}V + \xi\mathrm{grad}W.$$

Здесь Q [Дж/кг] - количество тепла, подводимого к рассматриваемой термодинамической системе (или отводимой от нее);

U [Дж/кг] - внутренняя энергия системы; P и V - давление и удельный объем, причем $V = 1/\rho$; ξdW [Дж/кг] - любая другая работа (тепло).

Прежде всего, воспользовавшись преобразованием Лежандра, перепишем:

$$P\mathrm{grad}V = P\,\mathrm{grad}1/\rho = \mathrm{grad}\,P/\rho - 1/\rho\,\mathrm{grad}P.$$

Поскольку все энергетические параметры имеют размерность Дж/кг, переведем их в размерность Дж/м^3, домножив один раз на плотность ρ. Умножая второй раз на плотность эти параметры, получим возможность перейти в уравнении первого начала термодинамики к молекулярно-кинетическому тензору, связанному с производной от импульса потока. Тогда получим:

$$\rho^2\mathrm{grad}Q = \rho^2\mathrm{grad}U + \rho^2\mathrm{grad}\frac{P}{\rho} - \rho\,\mathrm{grad}P + \rho^2\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Вновь воспользовавшись преобразованием Лежандра, получим выражение для внутренней энергии:

$$\rho^2\mathrm{grad}U = \mathrm{grad}\rho^2U - U\mathrm{grad}\rho^2.$$

После чего получим:

$$\rho^2\mathrm{grad}Q = \mathrm{grad}\rho^2U - U\mathrm{grad}\rho^2 + \rho^2\mathrm{grad}\frac{P}{\rho} - \rho\,\mathrm{grad}P + \rho^2\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Это основное уравнение, необходимое для дальнейших преобразований с целью получения уравнения движения газообразной среды.

Молекулярно-кинетический тензор и запись уравнения движения

В работе [5] показано, что молекулярно-кинетический тензор K через замкнутую поверхность материальной точки равен полной производной от импульса потока:

$$\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} = \frac{1}{\rho}\oint \mathrm{K}\vec{n}dS \equiv -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\mathrm{K}\,.$$

Здесь

$$\mathrm{K} = \sum\frac{c_i^2 m_i^2 v_i^2}{2}\cdot\mathrm{I}.$$

c_i, m_i, V_i - соответственно концентрация, масса и скорость i-й молекулы;

$c_i\cdot m_i = \rho_i$ - условная плотность i-х молекул;

$\frac{\rho_i V_i^2}{2}$ - удельная объемная энергия i-х молекул [Дж/м^3] или парциальное давление i-х молекул [н/м^2];

$\sum\frac{\rho_i V_i^2}{2}$ - внутренняя энергия системы;

$\sum\frac{\rho_i^2 V_i^2}{2}$ - полное давление внутри материальной точки;

I - единичный тензор.

Поскольку давление направлено внутрь материальной точки, то есть против внешней нормали, то перед интегралом стоит знак минус.

Другими словами, получена связь производной от импульса потока с внутренней энергией системы:

$$\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\rho^2U\cdot\mathrm{I} = \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\rho^2U.$$

Воспользуемся этой зависимостью:

$$\rho^2\mathrm{grad}Q = -\rho\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} - U\mathrm{grad}\rho^2 + \rho^2\mathrm{grad}\frac{P}{\rho} - \rho\,\mathrm{grad}P + \rho^2\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Попутно сделаем некоторые упрощения.

Сокращаем на плотность:

$$\rho\,\mathrm{grad}Q = -\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} - \frac{U}{\rho}\mathrm{grad}\rho^2 + \rho\,\mathrm{grad}\frac{P}{\rho} - \mathrm{grad}P + \rho\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Раскрываем аргументы под знаком градиент:

$$\rho\,\mathrm{grad}Q = -\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} - 2U\mathrm{grad}\rho + \mathrm{grad}P + \rho P\,\mathrm{grad}\frac{1}{\rho} - \mathrm{grad}P + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Преобразуем третий член справа от равенства:

$$\rho\,\mathrm{grad}Q = -\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} - 2U\mathrm{grad}\rho - \frac{P}{\rho}\mathrm{grad}\rho + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Комбинируем:

$$\rho\,\mathrm{grad}Q = -\frac{d\rho V}{d\tau} - \left(2U + \frac{P}{\rho}\right)\mathrm{grad}\rho + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

и вводим энтальпию:

$$\rho\,\mathrm{grad}Q = -\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} - (U + H)\,\mathrm{grad}\rho + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Далее, учитывая что $U = c_V\cdot T$ и $H = c_pT$, получаем:

$$\rho\,\mathrm{grad}Q = -\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}RT\mathrm{grad}\rho + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Преобразование второго закона термодинамики

Второй закон термодинамики в форме Клаузиуса записывается как: $T\,\mathrm{grad}S \geqslant \mathrm{grad}\,Q$, тогда, учитывая полученные преобразования для первого закона будем иметь:

$$\rho T\mathrm{grad}S \geqslant -\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}RT\mathrm{grad}\rho + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Перепишем этот закон в виде неравенства движения:

$$\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} \geqslant -\rho T\mathrm{grad}S - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}RT\mathrm{grad}\rho + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Это неравенство справедливо для необратимых процессов, например, когда имеет место взаимодействие системы с внешней средой. При этом работа диссипации, а в нашем случае работа, затрачиваемая потоком на преодоление сил трения, не учитывается. Она расходуется во внешней среде, возможно, превращаясь в тепло диссипации. Но! Если мы этот факт учтем, подобно тому, как это было сделано при выводе уравнений движения в соответствии с принципом Даламбера, где просто добавляется инерционный член, то добавив силу (работу) диссипации мы переведем неравенство второго начала термодинамики в уравнение первого начала. Диссипативный член будем вводить традиционно в форме тензора Коши. Дивергенция от этого тензора будет нести нагрузку касательных напряжений и объемных сил трения, подобно тому, как это сделано при выводе уравнения Навье-Стокса.

Добавляя в последнее неравенство эту дивергенцию получаем следующее равенство:

$$\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} = -\rho T\mathrm{grad}S - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}RT\mathrm{grad}\rho + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W + \mathrm{div}\Pi.$$

Прежде чем разобраться с диссипативными членами сделаем несколько преобразований с целью придания наглядности выкладкам.

Во-первых, преобразуем первый член справа:

$$\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} = -P\mathrm{grad}\frac{S}{R} - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{P}{\rho}\mathrm{grad}\rho + \rho\xi\mathrm{grad}W + \mathrm{div}\Pi.$$

Во-вторых, во втором члене справа перейдем к P/ρ, снижая тем самым количество неизвестных:

$$\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} = -P\mathrm{grad}\left(\frac{ST}{RT}\right) - \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{P}{\rho}\mathrm{grad}\rho + \rho\xi\mathrm{grad}W + \mathrm{div}\Pi.$$

И в-третьих, введем новый энергетический потенциал Э, соответствующий следующей сумме:

$$\mathrm{grad}Э = P\mathrm{grad}\left(\frac{ST}{RT}\right) + \frac{\kappa+1}{\kappa-1}\frac{P}{\rho}\mathrm{grad}\rho - \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Тогда, учитывая что $\mathrm{grad}Э = \mathrm{div}Э\cdot\mathrm{I}$, получаем

$$\frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} = -\mathrm{div}Э\cdot\mathrm{I} + \mathrm{div}\Pi. \quad \text{Или} \quad \frac{d\rho\vec{V}}{d\tau} = -\mathrm{div}(Э\cdot\mathrm{I} - \Pi).$$

Такая запись хотя и формальна, но весьма наглядна и отражает взаимосвязь потенциальных и диссипативных сил.

Уравнение импульсов потока

Далее выделим для удобства из тензора Коши силы нормального давления и запишем реологическое уравнение согласно полученному ранее Стоксом:

$$\Pi = -P\cdot \mathrm{I} + 2\mu\,\mathrm{D}.$$

Здесь Π - тензор напряжений Коши;

P и I - давление и единичный тензор;

μ - коэффициент динамической вязкости;

D - тензор скоростей деформаций. Он же - симметричная часть тензора $\mathrm{grad}\vec{V}$.

Реологическое уравнение приведем к виду:

$$\Pi = -P\cdot \mathrm{I} + 2\upsilon\,\mathrm{R}.$$

При этом имеем в виду зависимость нового тензора R от импульса потока. Вязкость теперь уже выступает как кинематическая, то есть как коэффициент диффузии.

Взяв дивергенцию от тензора Коши, получим

$$\mathrm{div}\Pi = -\mathrm{div}P\cdot \mathrm{I} + 2\upsilon\,\mathrm{div}\mathrm{R} = -\mathrm{grad}P + 2\upsilon\,\mathrm{div}\mathrm{R}.$$

Здесь некий тензор R будет записываться теперь в следующем виде:

$$\mathrm{R} = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial\rho V_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\rho V_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\rho V_2}{\partial x_1}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\rho V_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\rho V_3}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\rho V_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\rho V_1}{\partial x_2}\right) & \dfrac{\partial\rho V_2}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\rho V_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\rho V_3}{\partial x_2}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\rho V_3}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\rho V_1}{\partial x_3}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\rho V_3}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\rho V_2}{\partial x_3}\right) & \dfrac{\partial\rho V_3}{\partial x_3} \end{array}\right\}.$$

Далее, опуская известные преобразования, сделанные ранее, например в [7], по аналогии получаем привычную форму представления уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\mathrm{d}\rho\vec{V}}{\mathrm{d}\tau} = -\,\mathrm{grad}P - \mathrm{grad}Э + \mu\,\Delta\vec{V} + \frac{1}{3}\mu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{V}.$$

После раскрытия лапласиана будем иметь более упрощенное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}\rho\vec{V}}{\mathrm{d}\tau} = -\,\mathrm{grad}P - \mathrm{grad}Э + \frac{4}{3}\mu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{V} - \mu\,\mathrm{rotrot}\vec{V},$$

или

$$\frac{\mathrm{d}\rho\vec{V}}{\mathrm{d}\tau} = -\,\mathrm{grad}P - \mathrm{grad}Э + \frac{4}{3}\upsilon\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\rho\vec{V} - \upsilon\,\mathrm{rotrot}\rho\vec{V}.$$

Рассмотрим подробнее параметр Э:

$$-\,\mathrm{grad}Э = -P\,\mathrm{grad}\left(\frac{ST}{RT}\right) - P\,\mathrm{grad}\,\lg\rho^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

В другом виде получим:

$$-\,\mathrm{grad}Э = P\,\mathrm{grad}\,\lg\left(\rho^{-\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}\cdot e^{-\frac{ST}{RT}}\right) + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Произведение под логарифмом

$$\rho^{-\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}\cdot e^{-\frac{ST}{RT}}$$

характеризует релаксационный процесс, зависящий от энтропии термодинамической системы и отражающий закон действующих масс.

Тогда окончательно получаем:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}\tau} = -\,\mathrm{grad}P + \frac{4}{3}\upsilon\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{j} - \upsilon\,\mathrm{rotrot}\vec{j} +$$

$$+\,P\,\mathrm{grad}\,\lg\left(\rho^{-\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}\cdot e^{-\frac{ST}{RT}}\right) + \rho\,\xi\,\mathrm{grad}W.$$

Последнее уравнение является уравнением импульсов и отличается от традиционного уравнения Навье-Стокса, полученного при использовании гипотезы псевдоотвердения жидкой точки четвертым членом справа от знака равенства и возможным пятым членом при наличии других механизмов.


Михаил Васильевич Ломоносов


Юлиус Роберт Майер


Джемс Прескотт Джоуль


Адриен Мари Лежандр


Рудольф Юлиус Эммануил Клаузиус

Безусловно, четвертый член полученного нового уравнения движения требует специальных комментариев, но уже понятно, что уравнение имеет самый общий характер и учитывает практически все процессы, возможные при исследовании различных систем.

Тщательному исследованию подлежит безразмерное отношение

$$\frac{ST}{RT},$$

которое является кратностью большому потенциалу RT.

Литература

1. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Современная парадигма или картина Репина "Приплыли" // Двигатель. № 4, 2015.
2. М.А. Гольштик, В.Н. Штерн, Н.И. Яворский. Вязкие течения с парадоксальными свойствами // Новосибирск. Наука. 1974 г.
3. Ю.Д. Чашечкин. Структура и динамика природных течений: теоретическое и лабораторное моделирование // 50 лет Института проблем механики. М. Наука. 2015 г.
4. В.А. Князев. Гидродинамика без гипотезы псевдоотвердения жидкой точки // Изд. LAP LAMBERT Academic Pablishing, Германия, 2014 г.
5. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Молекулярно-кинетический тензор // Двигатель. № 1. 2016 г.
6. В.В. Сычев. Дифференциальные уравнения термодинамики // М. Наука, 1981 г.
7. Ю.М. Кочетков. Турбулентность сверхзвуковых течений. Памяти Гилевича // Двигатель. № 2. 2013 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com