УДК 532.526.4

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ.
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ТЕНЗОР СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Введен в практику газодинамического анализа новый фундаментальный тензор собственных частот. Записано в тензорном виде уравнение движения для автоколебательных процессов применительно к исследованию неустойчивости в ракетном двигателе.

A new fundamental tensor of self frequencies was put into practice of gasdynamic analysis. The equation of motion for the auto oscillatory processes recorded in the tensor form applied to research on instability in rocket engines.

Ключевые слова: ***турбулентность, тензор, собственная частота, автоколебания.***

Keywords: ***turbulence, tensor, self frequency, self-oscillation.***

Возвращаясь к причинам неустойчивости в ЖРД и других ракетных двигателей, а впрочем, в общем случае, в аппаратах и в энергетических установках, где есть рабочая сжимаемая среда, следует первым пунктом отметить турбулентность. Именно турбулентность является первопричиной колебания газовой и жидкой среды. При определенных условиях, когда расположение вихревых структур, либо торсионных жгутов приобретает свойство стационарности, а точнее установившейся циклики, возникают устойчивые колебания упругой системы. Это - автоколебания и они, как было показано ранее в [1], имеют частоту, равную собственным колебаниям ω_0. Это происходит из-за того, что диссипативная составляющая податливой системы уравновешивается дисперсной составляющей. Другими словами, затухание колебаний, связанное с вязким трением и градиентными эффектами, компенсируются нелинейными свойствами данной физической системы. Количественное соотношение параметров, показывающее начало такого баланса, это - условие Филина-Зенина:

$$\Phi Z > \frac{1}{4} \quad [2].$$

Это условие также можно считать более четкой и понятной формулировкой критерия Релея. Последнее условие является необходимым условием возникновения колебаний, но автоколебаниями они станут тогда, когда будет выполнено достаточное условие, полученное после уравнивания диссипативных и дисперсных членов в главном уравнении колебательного звена. При этом уравнение приобретает вид, похожий на уравнение колебательного звена идеального линейного осциллятора:

$$\ddot{X}+\omega_0^2 X=0.$$

Это условие постоянства произведения плотности среды и четвертой степени значения угловой скорости ω. Учитывая сильную зависимость второго сомножителя, можно спокойно утверждать, что постоянство этого сомножителя является достаточным условием возникновения автоколебаний:

$$\omega = \text{const}.$$

В процессе работы ЖРД внутри камеры сгорания могут возникать несколько зон с постоянными угловыми скоростями вихрей, где выполняется соотношение $\Phi Z > 1/4$. В этом случае в камере могут появиться несколько локальных осцилляторов, которые взаимодействуют друг с другом. Тогда встает вопрос об их синхронизации [3]. Условием синхронного колебания системы является соотношение, соответствующее генеральной последовательности синхронных частот Слесарева-Тарарышкина. При наличии условий, соответствующих этой последовательности, устанавливается резонансная частота системы в целом, а сама последовательность будет иметь вид:

$$CT = \{\omega_{0i}\} = \{\omega_{ci}\}.$$

Здесь индекс c означает принадлежность к синхронному колебанию [4]. В связи с этим встает вопрос, в каком направлении эти колебания могут происходить? То есть, в общем случае, колебания можно разложить по направлениям, в виде скаляров, являющихся проекциями некоторого псевдовектора. В общем случае, это - тензор. То есть, некоторая комбинация векторов. И, как будет показано далее, данный тензор все равно вырождается.

Связь собственной частоты с частотой вращения

Попробуем качественно установить математическую связь собственной частоты и угловой скорости стационарного вихря в турбулентном потоке. Для этого воспользуемся необходимым и достаточным условием возникновения автоколебаний в упругой газовой среде. Это - условие Филина-Зенина и условие постоянства вращения вихря. После преобразования условие Филина-Зенина может быть записано в виде неравенства [3]:

$$\frac{\omega}{\omega_0} < \frac{Re}{2}.$$

Здесь ω и ω_0- соответственно угловая скорость газа турбулентного потока и собственная частота автоколебаний. Re - число Рейнольдса, построенное по величине кривизны линии тока. В общем, это число, являясь неким критерием, может считаться величиной постоянной в каждой точке газового поля. И тогда можно считать, что ω < const ω_0. Последнее неравенство, помимо банальной пропорциональности ω и ω_0 указывает на начало колебательных движений.

Второе рассуждение о пропорциональности ω и ω_0 произведем с помощью некоего опыта. Если мы возьмем вращающийся диск с угловой скоростью ω и проследим за шариком, прыгающим внутри вертикально расположенной относительно диска трубки (рис. 1), то можно установить прямую связь между этими движениями. Движение шарика вверх под действием центробежных ударов по нему диска и последующее падение его за счет силы тяжести, представляет из себя цикличное, колебательное движение. Ясно, что это движение будет иметь постоянную частоту при условии постоянства угловой скорости вращения диска. Другими словами, установится колебательное движение, подчиняющееся уравнению линейного осциллятора:

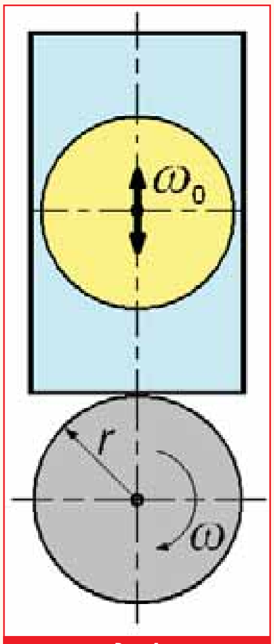

Рис. 1

$$\ddot{X}+\omega_0^2 X=0.$$

Но, с другой стороны, это движение происходит благодаря наличию центробежных сил, и тогда:

$$\ddot{X}=\omega^2 r,$$

где r - радиус диска.

При этом очевидно, что:

$$\omega^2 = \frac{x}{r}\,\omega_0^2.$$

То есть собственная частота пропорциональна угловой скорости вращения вихря:

$$\omega = \text{const}\ \omega_0.$$

Опыт с шариком аналогичен ситуации вблизи с вихрем в потоке. Близлежащие к вихрю объемы под действием его центробежных сил будут от него отдаляться, а под действием упругих сил среды приобретать возвращающую силу и приближаться. При определенных условиях может возникнуть колебательный контур. Главное в этих рассуждениях - установление прямой связи ω и ω_0.

И еще один очень наглядный пример пропорциональности пространственной и временной циклики. Это - критерий Струхаля. Известно, что этот критерий устанавливает связь собственной частоты колебаний потока за цилиндром и угловых скоростей вращающихся за ним вихрей. В зависимости от числа Рейнольдса этот критерий автомоделен и приблизительно равен величине 0,2. Именно в этой области как раз и возможно установление автоколебательных режимов, так как именно там возникают устойчивые пространственные конфигурации в виде вихрей и торсионных жгутов. Таким образом еще раз подтверждается пропорциональность частоты собственных колебаний упругой системы и угловой скорости вихрей в турбулентном потоке.

Тензор собственных частот

В общем виде уравнение движения для подвижной вязкой и сжимаемой среды для стационарного случая может быть записано в тензорной форме:

$$\rho \vec{V} \text{grad}\, \vec{V} = \text{div}\boldsymbol{\Pi}.$$

Здесь тензор $\boldsymbol{\Pi}$ соответствует реологическому уравнению:

$$\boldsymbol{\Pi} = -p \cdot \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D},$$

где в свою очередь:

p - статическое давление потока;

$\mathbf{I}$ - единичный тензор;

μ - коэффициент динамической вязкости;

$\mathbf{D}$ - тензор скоростей деформаций, симметричная часть тензора grad$\vec{V}$.

Антисимметричная часть тензора grad$\vec{V}$ является ротацией векторного поля. Ротация записывается в виде тензора, компонентами которого являются проекции угловых скоростей:

$$\begin{Bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Видно, что антисимметричный тензор определяется только тремя величинами ω_1, ω_2, ω_3. Основная особенность этого тензора в том, что главная диагональ его состоит из нулей, и если из этого тензора составить определитель, то он будет равен нулю. То есть система уравнений, составленная из компонентов этого тензора несовместна, и тензор вырождается. Каждому такому антисимметричному тензору отвечает некоторый аксиальный вектор и обратно. Причем аксиальным вектором, как известно [5], называется вектор, связанный с направлением обхода. Такой вектор также называется псевдовектором. Угловую скорость вращения тела можно представлять вектором, направленным по оси вращения в ту или другую сторону, в зависимости от направления обхода вокруг оси в ту или другую сторону. Отметим еще, что составляющими антисимметричного тензора по осям являются векторы:

$$i \times \omega;$$
$$j \times \omega;$$
$$k \times \omega,$$

где i, j, k - орты, а ω - абсолютное значение угловой скорости.

Теперь, если вспомнить зависимость угловой скорости от собственной частоты, то можно ввести новый фундаментальный тензор собственных частот. Компоненты этого тензора будут пропорциональны компонентам антисимметричного тензора, и могут быть записаны в виде:

$$i \times \omega_0;$$
$$j \times \omega_0;$$
$$k \times \omega_0.$$

Сам тензор может быть представлен в виде соответствующей структуры, и обозначен буквой Т, записанной готическим шрифтом - $\mathfrak{T}$.

$$\mathfrak{T} = \begin{Bmatrix} 0 & -\omega_{03} & \omega_{02} \\ \omega_{03} & 0 & -\omega_{01} \\ -\omega_{02} & \omega_{01} & 0 \end{Bmatrix}.$$

Этот тензор устанавливает взаимосвязь отдельных его компонентов между собой. Если этими компонентами являются продольные ω_{0z}, радиальные ω_{0r} и тангенциальные $\omega_{0\tau}$, то сам тензор может быть представлен в виде:

$$\mathfrak{T} = \begin{Bmatrix} 0 & -\omega_{0\tau} & \omega_{0r} \\ \omega_{0\tau} & 0 & -\omega_{0z} \\ -\omega_{0r} & \omega_{0z} & 0 \end{Bmatrix}.$$

В таком виде тензор собственных частот может войти в структуру фундаментального тензора grad$\vec{V}$:

$$\text{grad}\, \vec{V} = \mathbf{D} + c \cdot \mathfrak{T}.$$

В общем виде константа c отражает формальную пропорциональность тензора собственных частот и антисимметричного тензора. В этом представлении ротационная составляющая может быть заменена на колебательную. В сущности это одно и то же. Но последняя запись отражает причастность градиента к условиям автоколебаний.

Введенный тензор позволяет найти связь с тензором деформации посредством уравнения движения.

Уравнение движения для автоколебательных частот

Воспользуемся новым тензором $\mathfrak{T}$ для описания динамики системы в условиях автоколебательной ситуации. Уравнение движения

$$\rho \vec{V} \text{grad}\, \vec{V} = \text{div}\boldsymbol{\Pi},$$

после использования нововведенного тензора приобретает вид:

$$\rho \vec{V} \cdot \mathbf{D} + c \cdot \rho \cdot \vec{V} \cdot \mathfrak{T} = -\text{div} p \cdot \mathbf{I} + 2\mu \text{div} \mathbf{D}.$$

Отсюда следует запись, отражающая напрямую связь тензора собственных частот и тензора скоростей деформации. С точностью до константы c, она может быть записана в явном виде:

$$\vec{V} \cdot \mathfrak{T} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + 2\nu \text{div} \mathbf{D} - \vec{V} \cdot \mathbf{D}.$$

Для замкнутой термодинамической системы можно ввести зависимость от энтальпии и энтропии:

$$\vec{V} \cdot \mathfrak{T} = -\text{grad}\, h + T \text{grad}\, S + 2\nu\, \text{div}\, \mathbf{D} - \vec{V} \cdot \mathbf{D}.$$

Тогда, считая величину градиента энтальпии grad h - энергией, поступившей в поток в процессе горения, а произведение Tgrad$S$ - некоторыми внутренними потерями, можно объяснить значение каждого члена.

Автоколебания или, применяя терминологию ЖРД, неустойчивость, возникает из-за непременной подачи энергии в поток в

Струхаль Винсенс (Vincenc Strouhal) (10.04.1850 - 26.01.1922) - чешский физик и гидродинамик. Один из основателей Департамента физики (1907) в Карловом университете в Праге. Ректор этого университета с 1903 по 1904 годы. Исследовал колебания струн, процесс возникновение звука. Обнаружил, что причиной возникновения звука при колебании струны являются периодический отрыв воздуха и связанное с ним вихреобразование. Предложил критерий (число Струхаля), связывающий частоту колебаний потока со скоростью направленного течения и характерным размером.

результате горения. Часть энергии расходуется на диссипацию, а часть на деформацию субстанции колебательного звена.

Если по аналогии с уравнением Эйлера не учитывать диссипативные и дисперсные члены, то есть если считать, что они равны и погашают друг друга, то можно формально для идеального случая записать колебательное уравнение в следующем упрощенном виде:

$$\vec{V}\cdot \mathrm{T} = -\mathrm{grad}\, h.$$

Конечно, из этого уравнения не проглядываются нюансы механизма колебательного движения (затухание, нарастание), но в целях качественного понимания природы этого явления последнее уравнение имеет право на его анализ. Так, некий градиент энергии, поступивший извне (через форсуночную головку ЖРД) в камеру сгорания, возбуждает колебательные движения. Причем частота и направление колебаний определяются видом тензора T. Скалярное произведение этого тензора на скорость определяет также амплитуду колебаний.

Решение полученного уравнения и полного уравнения в совокупности с начальными и граничными условиями дает возможность воспроизвести поле собственных частот. При этом следует иметь ввиду, что тензор второго порядка, каким и является тензор собственных частот, можно связать с некоторым удобным геометрическим образом, аналогично тому, как это сделано для тензора инерции тела [6]. Не повторяя выкладок из последней работы, констатируем, что геометрическим образом в этом случае является ограниченная замкнутая поверхность второго порядка, то есть эллипсоид. Другими словами задание тензора второго порядка, однозначно предполагает задание эллипсоида. Но в нашем случае такая поверхность будет вырожденной, так как антисимметричный тензор градиента скорости вырождается в вектор и при этом теряется одна координата. Тогда образом уже становится не эллипсоид, а плоская фигура, являющаяся его срезом, то есть эллипс. Качественным подтверждением данного факта могут оказаться кстати экспериментальные замеры частот, представленные в работе [7]. На рис. 2 приведён вид с экрана компьютера результатов измерений в виде 3D-годографа колебаний, полученные с помощью нового перспективного 3D-приемника ЛМК/РФ (рис. 3).

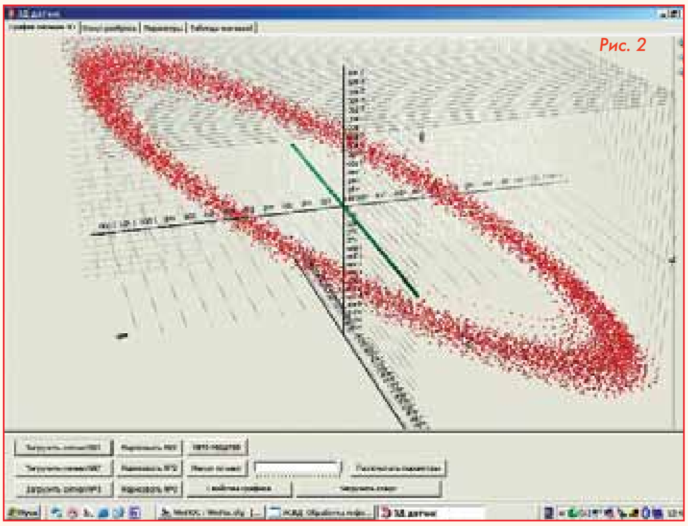

Рис. 2

Рис. 3

Литература

1. Ю.М. Кочетков. Турбулентность и автоколебательный процесс в ЖРД // Двигатель № 4, 2012 г.

2. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Возникновение неустойчивости в ЖРД // Двигатель № 2, 2012 г.

3. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Синхронизация автоколебаний в ЖРД // Двигатель № 6, 2012 г.

4. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Генеральная последовательность синхронных частот // Двигатель № 1, 2013 г.

5. Н.Е. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М. Изд. АН СССР, 1951 г.

6. М.А. Айзерман. Классическая механика. М. Наука, 1980 г.

7. А.А. Сперанский, А.А. Михеев, Г.Г. Михайлов. Интеграция опережающих междисциплинарных знаний в качестве универсальной системообразующей основы перспективных межвидовых исследований // Двигатель № 4, 2015 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com

Правка: В № 1-2016 в статье «Турбулентность. Молекулярно-кинетический тензор» на стр. 32 ошибочно приведен рисунок Амадео Авагадро. Приводим настоящий рисунок учёного. Автор и редакция приносят свои извинения читателям журнала.

Амадео Авагадро