УДК 532.526.4

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Из условий соответствия законам молекулярной физики получен новый фундаментальный молекулярно-кинетический тензор, однозначно определяющий производную импульса потока. Объяснен смысл динамического тензора Князева, как некоторого молекулярно-кинетического потенциала импульса.

A new fundamental tensor of self frequencies was put into practice of gasdynamic analysis.

Ключевые слова: ***турбулентность, тензор.***

Keywords: ***turbulence, tensor.***

Тензорное исчисление - могущественный аппарат исследования физических процессов. Наиболее привлекательным оно стало при исследовании газодинамических процессов в энергетических установках и двигателях на стадии их разработки и создания. Весьма важную роль играет использование этого строгого математического инструмента в научных целях при создании теорий и методов расчета. Гениальная простота при кажущейся на первый взгляд сложности и запутанности символов данной дисциплины, подкупает и ввергает в шок при соприкосновении с ней. Даже тот факт, что для обозначения тензоров используется готический шрифт, придает ей оттенок средневековой рыцарской торжественности, благородства и даже масонства. Все операции в тензорном исчислении до удивления просты и очевидны. Это, в основном, алгебраические действия и перестановка членов. Правильная индексация играет определяющую роль в формировании преобразований формальных таблиц (матриц) тензоров и получения новых математических структур. Высшая тензорная математика дает также возможность по ее правилам делать дифференциальные тензорные преобразования, которые в итоге сводятся так же к заполнению таблиц (составлению матриц). Тензорное исчисление весьма удобно при программировании систем дифференциальных уравнений. При этом построение алгоритмов и расчетных схем сильно упрощается. Это особенно важно при решении уравнений газовой динамики, которые будучи записанными в обычной скалярной или дивергентной форме содержат нелинейные члены и являются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка.

В предыдущей работе [1] было выделено три основополагающих тензора газовой динамики. Это - тензор напряжений Коши; тензор, определяющийся градиентом скорости и динамический тензор Князева. Эти тензоры играют важнейшую роль в глубоком понимании сложнейших газодинамических процессов, особенно турбулентных течений.

Итак, тензор Коши дает возможность по реологическим уравнениям рассчитать тензор скоростей деформаций локальных элементов сплошной подвижной среды и определить необходимые поля: скоростей, давлений и т.д. Тензор, выраженный в виде градиента скорости, после разложения его на симметричный и антисимметричный, представляет собой сумму деформации и ротации потока. А тензор Князева определяет в понятиях поля основополагающий параметр газовой динамики - импульс потока. При этом открываются возможности заменить, в общем-то, весьма сомнительную гипотезу псевдоотвердения жидкой точки на адекватную модель, построенную на базе полевых функций точки. Это дает возможность объяснить уравнения сохранения согласованно с термодинамикой.

Перечисленные тензоры сами по себе каждый являются предметом тщательного исследования в части открытия их новых, важных для практики и теории, свойств, в целях более углубленного понимания их физического смысла и происходящих газодинамических процессов. Но если, например, тензор Коши и градиент скорости могут быть достаточно убедительно физически объяснены, то тензор Князева на сегодняшний день пока только "введен в обиход". Физической интерпретации его пока еще нет. Его смысл в дальнейшем определим с помощью закономерностей молекулярно-кинетической теории.

Вывод нового фундаментального молекулярно-кинетического тензора

Целью введения тензора Князева было строгое определение импульса как полевой функции точки, при этом значение плотности ρ уже не выступало как параметр, умноженный на вектор скорости $\vec{V}$. Произведение ρV с помощью данного тензора уже получило статус вектора:

$$\vec{j} = \overrightarrow{\rho V} = div\, K.$$

Причем в данной записи этот вектор существует как некоторая математическая структура и не более того. В следующем разделе покажем, какой физический смысл она имеет. А в этом разделе введем по аналогии с тензором Князева другой тензор. И назовем его тоже буквой K, но только записанной готическим шрифтом $\mathfrak{K}$.

Итак, начнем с того, что мы так же, как Владимир Андреевич отказываемся от гипотезы псевдоотвердения жидкой (газообразной) точки. Точку мы теперь понимаем как материальную. То есть это - бесконечно малый объем d*V*, внутри которого находится континуальная среда, ограниченная замкнутой поверхностью *S* (рис. 1). При этом будем понимать, что после пересечения этой поверхности мы попадаем из макрореальности в микромир. Теперь нас окружает дисперсная среда, частицы (молекулы), причем каждая сама по себе, и здесь уже работают законы молекулярной физики, базирующиеся на открытом Робертом Броуном хаотическом движении, которое изящно подтвердил своими великолепными опытами Жан Батист Перрен.

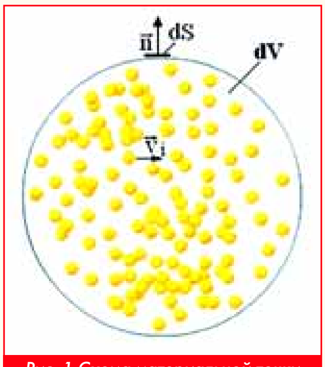


Рис. 1 Схема материальной точки

Количественно эту область оценим, применяя к анализу число Авогадро и опыт работы с функциями распределения частиц конденсированной фазы в продуктах сгорания РДТТ. Сотрудниками ОИХФ АН СССР (Черноголовка) В.А. Бостанджияном, В.И. Шевцовым и Е.И. Гусаченко теоретически [2] и экспериментально на бомбе постоянного давления, а позднее автором на модельном РДТТ было показано, что для представительного воспроизведения функции распределения частиц к-фазы по размерам нужно насчитать под микроскопом не менее одной тысячи частиц. С учетом числа Авогадро определим объем, занимаемый тысячью молекул

$$V = \frac{M}{\rho}\frac{N}{N_0},$$

где *M* и ρ - молекулярная масса и плотность;

$N_0 = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль - число Авогадро.

Тогда, например, для воздуха при нормальных условиях этот объем составляет кубик со стороной 1000 Å. Или, что почти то же самое, сферу диаметром 1000 Å. Теперь, если 1 Å = 10^{-10} м, то под объемом dV следует понимать сферу с диаметром 10^{-7} м. Это и есть та самая материальная точка бесконечно малого объема, внутри которого ещё работают законы молекулярной физики, одновременно реализуются эффекты коллективного взаимодействия и возникает континуум. Вначале возьмем из этого объема конкретную i-ю молекулу. Она имеет массу m_i и скорость v_i. Запишем с помощью этих величин кинетическую энергию для молекулы:

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2},$$

Эта энергия по Князеву называется энергией относительного движения. Почему относительного? Потому что она рассматривается относительно скорости реального макропотока. Чтобы определить суммарную энергию всех молекул воспользуемся понятием объемной концентрации каждой из них внутри всего ансамбля c_i 1/м². Тогда:

$$E_к = \sum c_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Понятно, что произведение массы на концентрацию эквивалентно плотности вещества. Далее построим конструкцию в виде произведения плотности на энергию. Эта конструкция так же, как и собственная энергия и импульс системы будет определять свойство жидкости или газа внутри рассматриваемой материальной точки. По аналогии с энергией этот новый параметр можно записать в виде:

$$\chi = \sum \frac{c_i^2 m_i^2 v_i^2}{2}.$$

Очевидно, что параметр χ является скалярным и однозначно характеризует систему, подчиняющуюся законам молекулярно-кинетической теории. Это - некий потенциал и, как потом выяснится, это - потенциал силы, или суммы сил, действующих на поток в макросистеме. Для краткости назовем его молекулярно-кинетическим потенциалом силы. На базе этого потенциала построим тензор:

$$\mathrm{K} = \chi \mathrm{I},$$

где I - единичный тензор. Тензор K назовем молекулярно-кинетическим, по аналогии с потенциалом.

Определим поток этого тензора через поверхность S материальной точки. Другими словами, воздействуем на этот тензор оператором дивергенция, причем

$$\operatorname{div}\mathrm{K} = \operatorname{div}\chi\mathrm{I} = \operatorname{grad}\chi.$$

Вспоминая определение потенциала χ, сделаем преобразования:

$$\operatorname{grad}\chi = \operatorname{grad}\sum\frac{c_i^2 m_i^2 v_i^2}{2} = \operatorname{grad}\frac{\overrightarrow{\rho V}^2}{2}.$$

Разложим градиент в соответствии с правилами векторного анализа на составляющие:

$$\operatorname{grad}\frac{\overrightarrow{\rho V}^2}{2} = \overrightarrow{\rho V}\operatorname{grad}\overrightarrow{\rho V}.$$

Вектор превратился в скалярное произведение вектора $\overrightarrow{\rho V}$ и тензора $\operatorname{grad}\overrightarrow{\rho V}$. Понятно, что при их умножении это будет снова вектор.

Вспоминая определение субстанциональной производной с точностью до нестационарного члена, можно записать:

$$\operatorname{div}\mathrm{K} = \rho\frac{d\overrightarrow{\rho V}}{d\tau}.$$

Или:

$$\frac{d\overrightarrow{\rho V}}{d\tau} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathrm{K}.$$

Очевидно, что эта формула будет справедлива и для нестационарного случая. То есть мы определили производную от импульса как полевую функцию точки в зависимости от молекулярно-кинетического тензора K. Из этого определения следует, что производная от импульса, которая в соответствии с законом сохранения импульса равна сумме всех сил, воздействующих на единицу объема потока, пропорциональна потоку через поверхность S молекулярно-кинетического тензора:

$$\frac{d\overrightarrow{\rho V}}{d\tau} = \mathrm{P}_\Sigma = \frac{1}{\rho}\oint \mathrm{K}\vec{n}dS.$$

Таким образом, физическое обоснование значения потенциала χ - молекулярно-кинетический потенциал силы.

Физический смысл тензора Князева

Для того чтобы понять физический смысл динамического тензора Князева, воспользуемся определением молекулярно-кинетического тензора. Тогда, вспоминая определение импульса по Князеву [2] $\overrightarrow{\rho V} = div\mathrm{K}$, запишем субстанциональную производную:

$$\frac{d\overrightarrow{\rho V}}{d\tau} = \frac{d\operatorname{div}\mathrm{K}}{d\tau}.$$

Или, что то же самое:

$$\frac{d\operatorname{div}\mathrm{K}}{d\tau} = \operatorname{div}\frac{d\mathrm{K}}{d\tau} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathrm{K}.$$

Но! Молекулярно-кинетический тензор это, как было показано, есть произведение потенциала χ на единичный тензор I. Тогда:

$$\operatorname{div}\frac{d\mathrm{K}}{d\tau} = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\sum\frac{c_i^2 m_i^2 v_i^2}{2}\cdot\mathrm{I}.$$

Для гипотетического случая несжимаемой жидкости (ρ = const) получаем, что под суммой остается только общая кинетическая энергия системы:

$$\sum E_{Ki} = E_K.$$

Тогда по аналогии, вводя некоторую эквивалентную энергию E_{Ka} (кинетическую энергию ансамбля) можно записать и для сжимаемого случая:

$$\operatorname{div}\frac{d\mathrm{K}}{d\tau} = \operatorname{div}E_{Ka}\cdot\mathrm{I}.$$

После чего получаем, что производная от тензора Князева с точностью до единичного тензора равна кинетической энергии системы внутри материальной точки:

$$\frac{d\mathrm{K}}{d\tau} = E_{Ka}\cdot\mathrm{I}.$$

Ну а сам тензор Князева тогда находится после интегрирования последнего уравнения по времени:

$$\mathrm{K} = \int E_{Ka}\mathrm{I}\cdot d\tau.$$

Учитывая свойства коммутативности, получаем:

$$\mathrm{K} = \int E_{Ka} d\tau\cdot\mathrm{I}.$$

То есть тензор Князева есть произведение скаляра на единичный тензор. По аналогии с молекулярно-кинетическим тензором, очевидно, что полученный интеграл является молекулярно-кинетическим потенциалом импульса:

$$\overrightarrow{\rho V} = \operatorname{div}\mathbf{K} = \operatorname{div}\left(\int E_{Ka}d\tau\cdot\mathrm{I}\right) = \operatorname{div}\psi\cdot\mathrm{I} = \operatorname{grad}\psi.$$

Почему же все-таки это потенциал? Очевидно потому, что внутри данного объема dV частицы совершают броуновское хаотическое движение, и в соответствии с опытами Перрена (рис. 2),

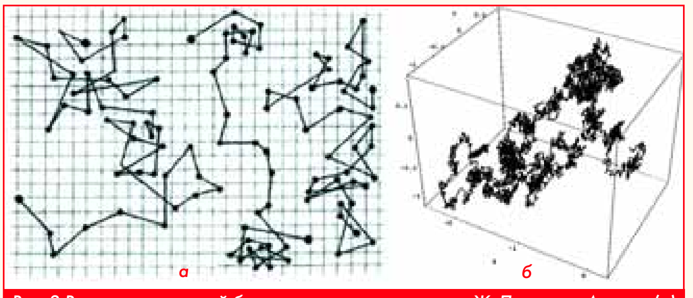
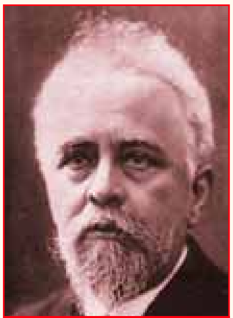


Рис. 2 Рисунки траекторий броуновских частиц из книги Ж. Перрена «Атомы» (а) и современных 3D наблюдений (б)

Амадео Авагадро

Роберт Броун



Жан Батист Перрен

траектория этих частиц получается в виде ломаной прямой. Вращения, как можно видеть и предполагать, нет. Частицы локально движутся по прямой от соударения до соударения. Конечно, крупные несимметричные молекулы обладают моментом количества движения, и могут вращаться вокруг своей собственной оси. Вращения же сгустков частиц относительно какого-либо центра, отсутствуют. Это означает, что $\mathrm{rot}\,\vec{V} = 0$ и течение условно потенциально. Но это не означает, что макродвижение во всем объеме исследуемых каналов и сопел будет потенциальным. Потенциальность будет сохраняться только в непосредственной близости от материальной точки, на выходе потока из нее. Ведь основное предположение, которое было сделано только лишь в целях иллюстрации данных тензоров о равенстве среднего по ансамблю потенциала силы и потенциала, составленного в области непосредственной близости вне материальной точки, может не выполняться. В общем случае, скорее всего, будут работать нелинейные эффекты.

Математически, представление молекулярно-кинетического тензора в виде произведения скаляра на единичный тензор, уже предполагало наличие потенциального течения, и в общем случае оно является частным случаем всевозможных течений. Такое представление позволило выявить сущность вводимых тензоров.

Если теперь для общего случая записать оба тензора как соответствующие потоки через замкнутую поверхность малого объема, и не вникая в существо их построения, определить как полевые функции: импульс и его производную, то можно составить систему уравнений газовой динамики исходя из соответствия ее законам термодинамики. При этом соответствие не будет формальным, как это принято при традиционных подходах.

Уравнения газовой динамики без гипотезы псевдоотвердения жидкой точки

Уравнения газовой динамики без гипотезы псевдоотвердения жидкой точки впервые для несжимаемого случая записал В.А. Князев в своей монографии [3]. Воспользовавшись этими уравнениями, запишем подобную систему для сжимаемого вязкого случая с использованием нового молекулярно-кинетического тензора.

Уравнение движения

Уравнение движения запишется в форме, аналогичной уравнению Навье-Стокса, но с применением тензора K. Попутно отметим, что, как показал Князев, новая гипотеза, отвергающая псевдоотвердение жидкой точки, не приводит к изменению уравнения импульсов. Для скоростей неважно, для чего записано уравнение - для геометрической или для материальной точки. Скорости до бесконечно малых и в том и в другом случае практически одинаковы. То есть скорость в центре масс бесконечно малого объема и в любой точке внутри этого объема одна и та же. Поэтому уравнение Навье-Стокса не утрачивает своего формализма:

$$\frac{\partial \rho\vec{V}}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\mathrm{K} = \mathrm{div}\Pi,$$

где Π - тензор напряжения Коши, который связан с тензором перемещения реологическим соотношением.

Реологическое соотношение

Реологическое соотношение записывается с использованием гипотезы о линейности тензора скоростей деформации и тензора напряжений, при этом:

$$\Pi = -p\mathrm{I} + 2\mu\mathrm{D}.$$

Здесь D - тензор скоростей деформации, и он является симметричной частью тензора $\mathrm{grad}\,\vec{V}$; p - статическое давление; μ - коэффициент динамической вязкости.

Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности записывается в форме Даламбера-Эйлера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \mathrm{div}\,\rho\vec{V} = 0.$$

С учетом молекулярно-кинетического тензора это уравнение необходимо решать совместно с основным уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}\rho\vec{V}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\mathrm{K}.$$

Уравнение энергии относительного движения жидкой точки

Получим традиционным способом уравнение энергии, используя уравнение импульса. Домножим это уравнение скалярно на импульс $\rho\vec{V}$:

$$\rho\vec{V}\cdot\frac{\partial \rho\vec{V}}{\partial \tau} + \frac{\rho\vec{V}}{\rho}\,\mathrm{div}\,\mathrm{K} = \rho\vec{V}\cdot\mathrm{div}\Pi.$$

После преобразования будем иметь:

$$\frac{\partial \frac{(\rho\vec{V})^2}{2}}{\partial \tau} + \frac{1}{\rho}\,\rho\vec{V}\cdot\mathrm{div}\,\frac{(\rho\vec{V})^2}{2}\cdot\mathrm{I} = \rho\vec{V}\cdot\mathrm{div}\,\Pi.$$

Из этого следует запись для уравнения энергии:

$$\frac{\partial \rho E_{\mathrm{K}}}{\partial \tau} + \frac{\rho\vec{V}}{\rho}\,\mathrm{grad}\rho E_{\mathrm{K}} = \rho\vec{V}\cdot\mathrm{div}\Pi.$$

Это уравнение должно быть совместно с первым и вторым законами термодинамики. Не повторяя выкладок Князева, запишем на основании последнего уравнения уравнение энергии относительного движения жидкой точки для случая [3, 4]:

$$D : T = \Phi - \sigma.$$

где σ - статистическая энтропия системы.

При этом:

$$D : T = \vec{V}\mathrm{grad}\,\frac{\vec{V}}{2}\ ;\ \Phi = \mathrm{grad}\,\vec{V} : \Pi \text{ - диссипация.}$$

Тогда в виде неравенства получаем:

$$\mathrm{grad}\,\vec{V} : \Pi - \vec{V}\mathrm{grad}\,\frac{\vec{V}}{2} \geqslant 0.$$

Или после подстановки тензора K, имеем:

$$\mathrm{grad}\,\vec{V} : \Pi - \vec{V}\mathrm{div}\,\mathrm{K} \geq 0.$$

Последнее неравенство есть тензорное выражение второго начала термодинамики.

Литература

1. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Фундаментальные тензоры газовой динамики // Двигатель № 1, 2015 г.

2. В.А. Бостанджиян. Определение плотности вероятности. Необходимый объем выборки, М. Наука,1971 г.

3. В.А. Князев. Гидромеханика без гипотезы псевдоотвердения жидкой точки. изд. LAP LAMBERT Academic Pablishing, Германия, 2014 г.

4. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Уравнение энергии и условия совместности с термодинамикой // Двигатель № 6, 2015 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com

Правка: В № 6-2015 в статье «Турбулентность. Уравнение энергии и условия совместности с термодинамикой» на стр. 44 вместо формулы:

$$h_0 + \int TdS + \frac{4}{3}\frac{\nu\vec{V}}{\rho a^2}\,\mathrm{grad}p = 0.$$

следует читать:

$$h_0 + \int TdS + \frac{4}{3}\frac{\nu\vec{V}}{\rho a^2}\,\mathrm{grad}p = C.$$

Автор приносит свои извинения читателям журнала.