УДК 532.526.4

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ И УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ С ТЕРМОДИНАМИКОЙ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

С учетом введения тензора Князева в аксиоматику гидродинамики и перехода к полевым переменным, уравнение движения Навье-Стокса не изменилось, но потребовалось уточнение уравнения энергии с целью совместности его с требованиями термодинамики. Сформулирована теорема Крокко для вязких сжимаемых течений, на основании которой получено уравнение энергии для сверхзвуковых течений.

In view of the introduction of the Knyazev tensor axiomatic in hydrodynamics and cross-over to the field variables, the Navier-Stokes motion equation has not changed, but in terms of compatibility with the requirements of thermodynamics it needed clarification. Crocco's theorem for viscous compressible flows formulated, and equation for the energy of supersonic flows obtained on its basis.

Ключевые слова: ***турбулентность, уравнение энергии, термодинамика, тензор, вязкость, сжимаемость..***

Keywords: ***turbulence, energy equation, thermodynamics, tensor, viscosity, compressibility.***

Исследуя турбулентные течения, неминуемо сталкиваешься с анализом и решением уравнения Навье-Стокса. Оно - это уравнение - дает возможность получить поле скоростей потока в рассматриваемой конструкции. Но, как было показано в [1], для его решения требуется максимум еще два уравнения, чтобы "избавиться" от плотности, давления и оставить три неизвестные в виде проекций скоростей. Так как плотность пропорциональна дивергенции скорости, то она сразу может быть исключена. А вот с давлением не так все просто. Традиционно применяют для этого уравнение энергии. Очень часто для "идеальных задач" принимают приращение энтропии равное нулю. Конечно, это - слишком модельное условие. Это очень грубое приближение, взятое из теоремы Крокко. Кстати, и теорема Крокко является достаточно грубым приближением практически к любому реальному случаю, так как она доказана для "идеального", то есть невязкого и несжимаемого случая. Но! Самая важная проблема, которая обойдена современной наукой - это неучет принятой аксиоматикой особенностей свойств исходного бесконечно малого объема при выводе уравнений движений. На сами уравнения движений Навье-Стокса неучет этих свойств не повлиял, так как разница в скоростях в центре массы, заключенной в этом объеме, и в непосредственной близости от этого центра, с точки зрения высшей математики равна нулю, поскольку объем $dxdydz$ равен бесконечно малой величине. Однако другие параметры, такие как момент количества движения и особенно энергия, не могут быть такими же, как в центре массы. Материальная точка, при стремлении названного объема к нулю, имеет физические свойства, такие как масса, плотность, функция распределения молекул и, в общем-то, протяженность. Обладает вязкостью, теплопроводностью, диффузией и подчиняется началам термодинамики и молекулярной физике. Математическое понятие точки ограничивается неким философским представлением о примерном местоположении в пространстве данного физического объема.

Вот почему использование в качестве аксиомы вместо реального вещества, заключенного в бесконечно малом объема некоего твердого вещества без изменяющихся свойств, неправомочно с точки зрения соответствия законам термодинамики. В таких условиях решение векторного уравнения Навье-Стокса (повторяем, оно правильное) может иметь области с уменьшающейся энтропией. С целью исключения этого казуса следует в период применения уравнения энергии учитывать особенности внутренних процессов, происходящих с молекулами в объеме. Правильное понимание этих процессов позволяет различить диссипацию и тривиальное приращение энтропии. В первом случае, случае традиционного стоксовского подхода, они равны, что будет показано ниже. Во втором [2], где использована гипотеза, исключающая искусственное превращение подвижной среды из континуальной, в некую абстрактную с постоянными свойствами, соответствующими предельным, при которой диссипация, то есть рассеянная мощность внешних сил и приращение энтропии как необратимой мощности внутренних сил, не равны. Более того, от их разницы зависит устойчивость в естественном процессе. Другими словами, обеспечивается совместность гидрогазодинамики с требованиями термодинамики.

Проще говоря, при замыкании системы уравнения сплошной среды необходимо, помимо использования только фундаментальных законов физики, активно применять соотношение совместности принятой аксиоматики и термодинамики.

Аксиоматика Князева

Традиционная гидрогазодинамика Навье-Стокса базируется на представлении реальных рабочих тел в виде континуума - сплошной материальной среды. В отличие от классической ньютоновской механики в гидрогазодинамике не оперируют понятием математической точки, заменяя ее некоторым твердым материальным элементом с постоянными свойствами. В этом случае уравнение импульсов дает только информацию о скорости центра масс. Внутренние движения - движения "внутри" этой точки игнорируются, так как они элементарно не предусмотрены аксиоматикой. Дивергенция от формально введенного тензора Князева $\mathrm{div}K = \rho\vec{V}$ даёт возможность представить на всем пространстве течение в виде единого континуума. Другими словами, наделить в том числе бесконечно малый, элементарный объем среды свойствами реальной жидкости. Введенный тензор K предполагает новую модель сплошной среды, где переменными могут быть только полевые функции - функции точки непрерывного пространства.

Традиционно импульс представляется как некоторое произведение полевой переменной скорости и "скалярной" плотности, которая (плотность) не являлась таковой (полевой), так как ее необходимым атрибутом является некоторая мера (масса или протяженность элемента жидкой и газообразной среды). Динамический тензор Князева в корне меняет подход к рассмотрению подвижной среды, превращая все переменные в полевые. Его поток

$$\oint K\cdot\vec{n}\,dS$$

на некоторую замкнутую поверхность равен импульсу тела, ограниченного этой поверхностью, а дивергенция уже автоматически характеризует скорость центра масс рассматриваемого тела. Тогда, как легко увидеть получается, что введенный тензор связан с тензором напряжения Π через уравнение импульсов некоторого жидкого или газообразного тела.

$$\frac{d}{d\tau}\oint K\cdot\vec{n}dS = \oint \Pi\cdot\vec{n}dS.$$

Элементарные преобразования приводят к традиционной записи уравнения движения:

$$\rho\frac{d\vec{V}}{d\tau} = \mathrm{div}\Pi,$$

из которого видно, что применение динамического тензора не меняет вида локального уравнения импульса, поскольку внутреннее движение относительно центра масс и внутренние силы не изменяют импульса тела.

В классической гидродинамике показывается, что тензор напряжения должен быть симметричным, реологическое соотношение (для несжимаемой жидкости) принимается в соответствии с гипотезой Стокса в виде:

$$\Pi = 2\mu D.$$

где μ - коэффициент динамической вязкости, а D - тензор скоростей деформации, симметричная часть тензора градиента скорости $\mathrm{grad}\vec{V}$ [3].

В такой постановке получается уравнение Навье-Стокса и, как уже отмечалось, оно совпадает с аналогичным уравнением, полученным с использованием полевых переменных. Что же теперь делать с уравнением энергии? Ведь по смыслу оно будет отличаться от широко предлагаемого традиционного уравнения, где не учитываются особенности новой аксиоматики. По-видимому, следует еще раз на него посмотреть в сравнении с новым [2]. Прежде чем это сделать, отметим еще раз основные положения теории Стокса, заложенные при разработке системы уравнений движения сплошной среды.

1. При формировании аксиоматики используется гипотеза псевдоотвердения жидкой точки. При этом переменные рассматриваются не как функции поля. Это приводит к нарушению первого начала термодинамики.

2. Считается, что тензор деформации симметричен, при этом диссипация отождествляется с приростом энтропии, что может приводить в особых случаях к нарушению второго начала термодинамики.

Уравнения энергии с позиции представления среды в виде полевой функции точки

Будем пользоваться логикой Князева. Вначале воспроизведем традиционную схему вывода уравнения энергии. Для этого скалярно умножим уравнение движения на вектор скорости. Опуская аксессуары, получим скалярное уравнение для кинетической энергии:

$$\rho\frac{d}{d\tau}\frac{\vec{V}^2}{2} = \vec{V}\cdot\mathrm{div}\Pi.$$

Интегрируя его по некоторому объему, с целью получения выражения для работы внешних сил, получаем "уравнение живых сил":

$$\frac{d}{d\tau}\int\rho\frac{\vec{V}^2}{2}d\tau = W^e - \int\Phi d\tau,$$

где $W^e = \oint\vec{V}\cdot\Pi\cdot\vec{n}dS$ - работа внешних сил;

$\Phi = D:\Pi \equiv \Sigma(D_{ij}\cdot\Pi_{ij})$ - бискалярное произведение тензоров, характеризующее диссипацию, то есть рассеянную мощность внешних сил.

Это же уравнение можно получить из закона сохранения энергии, когда изменение суммы энергии при движении тела и внутренней энергии равно сумме мощности внешних сил и потока тепла. Причем в соответствии с первым началом термодинамики изменение внутренней энергии U тела равно сумме мощности внутренних сил W^i и потока тепла Q^e:

$$\frac{dU}{d\tau} = W^i + Q^e.$$

В свою очередь мощность внутренних сил состоит из обратимой W_0^i и необратимой $W_*^i = \int\sigma d\tau$, где σ - статистическая энтропия.

Опуская дальнейшие выкладки, приведенные в [2], представим окончательное уравнение для изменения кинетической энергии E_K, совпадающее в точности с написанным выше. И далее, используя соотношения для механической энергии движения E, получим уравнение энергии относительного движения:

$$\frac{d}{d\tau}(E - E_K) = \int(\Phi - \sigma)d\tau.$$

Принимая гипотезу Стокса псевдоотвердения жидкой точки, то есть, пренебрегая энергией движения частиц среды в этой "материальной точке" относительно центра масс, получим равенство $E = E_K$ и тогда $\sigma = \Phi$. То есть последнее выражение утверждает, что необратимая мощность внутренних сил σ, которая в естественном процессе должна быть неотрицательной, равна диссипации Φ, то есть рассеянной мощности внешних сил, которая всегда неотрицательна.

Курьез данного вывода заключается в том, что делается утверждение (анализ уравнения Неймана [4]) о совместимости любого динамически возможного течения, совместимым с требованиями термодинамики. То есть делается сомнительный вывод о том, что необратимая мощность в естественном процессе остается всегда неотрицательной.

Введение Князевым понятия динамического тензора дало возможность с помощью полевых переменных объяснить разницу между σ и Φ. Записывая уравнение импульсов через тензор Князева, получаем интегральное уравнение движения:

$$\oint\left(\frac{d}{d\tau}K + T - \Pi\right)\vec{n}dS = 0.$$

Здесь второй член в скобках $T = \vec{V}\mathrm{div}\vec{V}$ является диадой [5]. Умножая каждый элемент $\vec{n}dS$ скалярно на вектор скорости $\vec{V}$, очевидно получим, что в общем случае равенство нулю интегрального соотношения будет нарушено ($\neq 0$). И тогда, сравнивая его с уравнением энергии для несжимаемой жидкости:

$$\frac{d}{d\tau}E = \int\vec{V}\cdot\Pi\cdot\vec{n}dS - \int\sigma d\tau,$$

получим:

$$\int\vec{V}\cdot\left(\frac{d}{d\tau}K + T - \Pi\right)\cdot\vec{n}dS = -\int\sigma d\tau.$$

В случае сжимаемой жидкости обратимая мощность W_0^i будет связана с изменением параметров состояния термодинамической системы. Эта ситуация требует специального анализа.

В последнем уравнении левая сумма в скобках под интегралом характеризует изменение энергии среды в объеме, а интеграл произведения с тензором напряжений мощность внешних сил. Причем последний интеграл разлагается на диаду и диссипацию $\Phi = D:\Pi$:

$$\oint\vec{V}\cdot\Pi\cdot\vec{n}dS = \int(\vec{V}\mathrm{div}\Pi + \Phi)d\tau.$$

Для стоксовского режима, когда остается только симметричная часть тензора $\mathrm{grad}\vec{V}$, то есть тензор деформаций, диссипация равна $\Phi = 2\mu\cdot(D:D)$. Но! Если тензор $\mathrm{grad}\vec{V}$ содержит несимметричную часть, тогда $\Phi = \mathrm{grad}\vec{V}:\Pi$. И тогда локальное уравнение движения относительно точки центра масс в жидком или газообразном элементе может в соответствии с [2] быть представлено в виде:

$$\mathrm{grad}\vec{V}:\frac{d}{d\tau}K + D:T = \Phi - \sigma.$$

Из последнего уравнения следует нетождественность необратимой мощности внутренних сил и диссипации. В естественном процессе согласно второму началу термодинамики, необратимая мощность внутренних сил должна быть неотрицательной величиной (положительное производство энтропии), в то время как диссипация всегда неотрицательна. Из этого следует, что темп изменения энергии относительно движения "жидкой" точки не может превышать диссипации. Иными словами, не всякое динамически возможное течение оказывается совместимым с требованиями термодинамики.

Для стационарного неустановившегося потока уравнение энергии относительно движения будет иметь вид:

$$D:T = \Phi - \sigma.$$

Из него следует, что динамически возможное движение совместимо с требованиями термодинамики, если

$$\Phi - D:T > 0$$

Это - центральный результат применения динамического тензора Князева.

Итак, формулировка гидродинамики на базе аксиоматики Князева приводит в системе уравнений естественных течений:

1. Уравнение неразрывности;
2. Уравнение движения;
3. Реологическое соотношение $\Pi = -P \cdot I + 2\mu D$;
4. Уравнение энергии относительного движения жидкой точки

$$D : T = \Phi - \sigma.$$

Дополнительно необходимо сформулировать краевые условия с учетом особенностей решения задач.

Уравнение энергии и теорема Крокко для вязкого сжимаемого газа

Представление уравнений в задачах газовой динамики в виде тензорных соотношений весьма удобно при численных реализациях. Главное - правильно провести индексацию строк и столбцов. Но часто для анализа нагляднее записывать уравнение в векторном виде. Так, уравнение Навье-Стокса можно записать в виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + \mathrm{grad}\,\frac{\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p - \frac{4}{3}\nu\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{V} + [\mathrm{rot}\,\vec{V} \times \vec{V}] + \nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{V} = 0.$$

Третий член этого уравнения с учетом первого и второго начал термодинамики для обратимых процессов (замкнутая термодинамическая система) можно выразить через энтропию S. Причем необходимо иметь ввиду, что $S = K_Б \cdot \sigma$, где $K_Б$ - константа Больцмана.

$$\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = \mathrm{grad}\,h - T\mathrm{grad}\,S = \mathrm{grad}\,h - \mathrm{grad}\,Q.$$

Здесь h и Q - статическая энтальпия и тепло.

Тогда теорема Крокко может быть записана с учетом вязкости и сжимаемости:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + \mathrm{grad}\left(h_0 - Q - \frac{4}{3}\nu\,\mathrm{div}\,\vec{V}\right) + [\mathrm{rot}\,\vec{V} \cdot \vec{V}] + \nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{V} = 0.$$

Эта теорема устанавливает связь энтропии с параметрами вращения и кручения потока. Она учитывает сжимаемость и вязкость. Если на это уравнение воздействовать векторным оператором дивергенция, то можно получить соотношение для энергии:

$$\Delta\left(h_0 - \int T\mathrm{d}S - \frac{4}{3}\frac{\nu}{\rho a^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\right) + \vec{V} \cdot \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{V} - \mathrm{rot}\,\vec{V} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{V} = 0.$$

Для стационарных ламинарных течений уравнение энергии вдоль линий тока может быть записано в виде:

$$h_0 - \int T\mathrm{d}S - \frac{4}{3}\frac{\nu\vec{V}}{\rho a^2}\,\mathrm{grad}\,p = 0.$$

Это уравнение справедливо при расчетах сверхзвуковых течений. Если для этого случая считать, что полная энтальпия вдоль линий тока не изменяется, тогда можно утверждать, что изменение энтропии будет определяться только сжимаемостью и вязкими эффектами.

Одновременно следует отметить, что в сверхзвуковом потоке выполняется теорема о соотношении элементарных движений.

Для незамкнутой термодинамической системы прирост энтропии будет состоять из вклада, поступающего из окружающей среды, и вклада, возникающего в самой системе. Тогда уравнение производства энтропии может быть записано в виде:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial \tau} = -\,\mathrm{div}(\rho\vec{V}S - q_S) + \omega_S, \quad \omega_S > 0.$$

Здесь первый член в скобках под дивергенцией учитывает перенос энтропии с газом через границу объема, второй - другие возможные виды переноса. Параметр ω_S характеризует "рождение" энтропии внутри объема. Уравнение можно переписать также через полную производную:

$$\frac{\mathrm{d}(\rho S)}{\partial \tau} = -\,\mathrm{div}\,q_S + \omega_S.$$

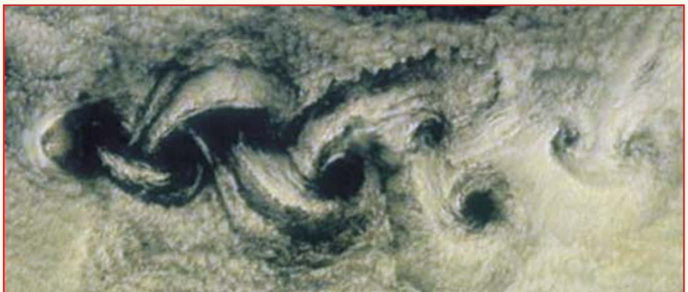
Проделанный анализ уравнения энергии говорит о сложности процессов, происходящих внутри объема подвижной среды в условиях реальных событий.

Изучение данного процесса еще до конца не завершено, и, по-видимому, помимо использования только фундаментальных законов физики для полного замыкания системы уравнения движения гидродинамики сплошной среды необходимо привлечение дополнительных гипотез.

Литература

1. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Фундаментальное граничное условие сопровождения и новая постановка краевой задачи вязкой газовой динамики // Двигатель № 5, 2015 г.
2. В.А. Князев. Гидромеханика без гипотезы псевдоотвердения жидкой точки, изд. LAP LAMBERT Academic Pablishing, Германия, 2014 г.
3. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Фундаментальные тензоры газовой динамики // Двигатель № 1, 2015 г.
4. Дж. Серрин. Математические основы классической механики жидкости. М. изд. Иностранной литературы, 1963 г.
5. Н.Е. Кочин. Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М. изд. Академии наук СССР, 1951 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com



Турбулентность в атмосфере

Турбулентность под вертолетом

Турбулентность во льдах