

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ СОПРОВОЖДЕНИЯ И НОВАЯ ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВЯЗКОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Юрий Михайлович Кочетков, д.т.н.

Впервые сформулировано новое граничное условие "сопровождения" на оси вязкого сжимаемого потока для внутренних течений в камерах сгорания и соплах. Дана математическая формулировка краевой задачи для вязкого сжимаемого ламинарного течения жидкостей и газов в камерах сгорания, соплах РД и каналах с внутренними течениями.

The new boundary conditions of "the following" on the axis of the viscous compressible flow were first stated for internal flows in the combustion chambers and nozzles. The mathematical formulation of the boundary-value problem for the viscous compressible laminar flow of fluids and gases in the combustion chambers and nozzles of rocket engines and internal-flow channels was given.

Ключевые слова: турбулентность, краевая задача, граничные условия, вязкость, сжимаемость.

Keywords: turbulence, boundary-value problem, boundary conditions, viscosity, compressibility.

В предыдущей работе [1] были получены новые уравнения пограничного слоя, принципиально отличающиеся от уравнений, используемых в настоящее время при расчетах внутренних и внешних пристенных течений вблизи криволинейных шероховатых стенок. Основная идея новых уравнений при их выводе заключалась в том, что первоначально было использовано векторное уравнение Навье-Стокса без каких-либо упрощений, если они не были связаны со строгими математическими правилами. Математические преобразования делались на базе теорем и доказанных утверждений. Это дало возможность получить векторное уравнение для пристенного вязкого потока вблизи внутренних поверхностей стенок ракетных двигателей и в принципе любых других каналов.

Как уже говорилось, предшествующий подход к решению таких задач, где поток разделялся, является неправильным в силу многочисленных некорректных допущений. Полученные новые вязкие уравнения для непрерывных полей, описывающие, в том числе подробно пристенные течения, позволяют теперь правильно сформулировать постановку задачи.

Итак, ранее автором было показано, что вблизи стенок камеры, а также на всем пространстве сверхзвуковой области сопла двигателя, начиная от критического сечения, да и в общем случае, начиная с сечения, где параметры потока принимают критические значения и далее их превышают, поток всегда ламинарный. Этот поток описывается векторным уравнением Навье-Стокса для ламинарного течения [2]. После преобразования для стационарного случая математически он может быть описан более простым векторным уравнением:

$$\bar{V} \operatorname{grad} \bar{V} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + \frac{4}{3} \frac{\nu}{\rho a^2} \operatorname{grad}(\bar{V} \operatorname{grad} P) = 0.$$

Координаты S и η внутри этого уравнения, привязанные к внутренней поверхности стенки двигателя, по-прежнему остаются теми же и справедливы для описания осесимметричной пристенной области. Для постановки задачи записанному уравнению не хватает граничных условий. Очевидно, что кроме этих условий, наложенных в данном случае на скорость, необходимо также привести в соответствие количество уравнений и количество неизвестных. Действительно, например, для осесимметричного случая, требуется, применительно к двигательным задачам, по крайней мере, четыре уравнения, так как четыре неизвестных. Это две проекции скорости V_s и V_η , а также давление P и плотность ρ . Поэтому для замыкания системы добавляем уравнение энергии, нап-

пример, по аналогии с потенциальным случаем в соответствии с теоремой Крокко, в виде постоянства энтропии ($dS = 0$) и дифференциальное уравнение неразрывности Даламбера [3]. Вот теперь, если каким-то образом получить аналитически неявную зависи-



Даламбер

мость для системы из двух уравнений относительно скоростей, допустим, что это можно сделать, а численно - это точно можно, то получим два уравнения в частных производных второго порядка относительно V_s и V_η или одно векторное уравнение, подобное уже написанному выше.

Теперь можно ставить граничные условия. Понятно, что их должно быть четыре, так как уравнений два и порядок - второй (четыре). Но прежде, чем перейти к их написанию, процитируем двух классиков. У.Г. Пирумов: "Нетривиальным является задание граничных условий при течении газа в соплах". Ю.Д. Шевелев: "Одна из основных трудностей при решении... системы уравнений заключается в... граничных условиях...". Эти фразы говорят о неблагополучии в разрешении систем газодинамических уравнений. Каждый раз нужно последовательно решать очень трудную противоречивую задачу - находить адекватные математические представления физическому явлению. Трудность заключается еще и в том, что, к сожалению, иногда из-за недостатка знаний физических процессов ставятся абсолютно нефизические условия на неправильные уравнения. Например, условие непротекания на уравнение Эйлера в решении задачи о сопле. Это условие поставлено не из-за хорошей жизни. Это досадная необходимость.

Краевая задача. Условие на стенке

Известно, что при изучении течений в двигателе решаются практически все типы задач математической физики: задачи Коши, краевые и смешанные задачи. Задача, в которой определяется поле течений, сводится в общем случае к краевой задаче. При этом на границе исследуемой области решения, ставятся граничные условия как на жесткой стенке, так и на границах, через которые поток втекает и вытекает. Как правило, на жесткой стенке, в

области сильных воздействий вязкости, где градиенты очень большие, традиционно ставятся граничные условия Прандтля. Это условия прилипания. Гипотеза Прандтля о том, что поток прилипает к стенке, строго говоря, не доказана теоретически, но практически экспериментальные доказательства делают эту гипотезу весьма убедительной.

Доказательства, построенные с помощью молекулярно-кинетической теории также строятся на предположениях, и, в общем случае, могут только подтверждать правомочность использования полученных результатов при практических расчетах. Крупный ученый, специалист в области тепломассообмена, профессор, доктор технических наук, лауреат Ленинской премии Валентин Яковлевич Лихушин в своей замечательной монографии [4] весьма убедительно показывает правильность



В.Я. Лихушин

рассуждений Л. Прандтля. Располагая знаниями характеристик взаимодействия молекул газа со стенкой, связанных с изменением момента количества движения и энергии каждой молекулы, Лихушин вводит осредненные параметры отражения частиц и коэффициенты аккомодации. На основании анализа классических опытов он показывает, что диффузно отраженные молекулы не сразу отскакивают от стенки, а сначала внедряются в нее и остаются там на некоторое время, за которое происходит обмен энергиями и количествами движения. При этом молекула приспосабливается к условиям стенки, аккомодирует. На этом эффекте построена теория прилипания. Действительно, рассматривая детально скорости молекул между двумя стенками с учетом диффузного отражения, путем преобразования показывается, что на стенке возникает скачок скорости, представляющий собой разность между скоростью на стенке u_s и скоростью движения самой стенки u_0 , который будет пропорционален поперечному градиенту:

$$u_{\text{ск}} = u_s - u_0 \sim \frac{du}{dy}.$$

Для разреженных газов этот скачок может оказаться достаточно ощутимым. Но в обычной газовой динамике характерная длина свободного пробега l достаточно мала в сравнении с характерными линейными размерами задачи L , поэтому скачком скорости газа на стенке можно пренебречь, считая его равным нулю. В этом - смысл теории прилипания. Весь имеющийся опыт физического и численного экспериментов убеждает в правильности такого вывода.

Граничные условия прилипания, выдвинутые Прандтлем, являются на сегодняшний день самым понятным условием для вязких краевых задач. Но это условие предполагает не только равенство нулю тангенциальной, параллельной стенке скорости течения. Это условие также означает и равенство нулю всех других составляющих абсолютной скорости:

$$\eta = 0; \vec{V} = 0.$$

Следует отметить, что условие $\eta = 0$; $V_\eta = 0$ также удовлетворяет условию прилипания. Последнее условие по инерции, а скорее в силу невозможности поставить другое, ставится при решении невязкой задачи. Понятно, что это только совпадение. В последнем случае эффект прилипания совпадает с так называемым искусственно введенным условием непротекания.

Что касается условия прилипания, то в феноменологической постановке они могут быть заменены некоторыми условиями проскальзывания, но повторимся, что физический эксперимент, относящийся к обычным условиям течения, определенно говорит в пользу условия прилипания. Исключения составляют только весьма разреженные газы.

Задание граничных условий на оси симметрии

При решении уравнений, описывающих течение внутри ракетного двигателя (камеры и сопла) требуется помимо условий на твердой стенке задать граничные условия для всей остальной области решения, в том числе на свободных границах. К ним относятся поверхности втекания и вытекания потока из рассматриваемой области. Так называемые открытые границы. Задание граничных условий на этих поверхностях можно считать дополнительными условиями. Как правило, поперек этих поверхностей задаются расходы или эпюры скоростей на входе. Часто для этих областей в практических задачах задаются условия по температурам, концентрациям, давлениям. При необходимости на поверхности можно задать шероховатость, но строго говоря, в математическом понимании постановки задачи, эти условия не являются граничными, они скорее описывают свойства области или поверхности обтекаемой стенки.

Часто в литературе встречаются условия, претендуемые на граничные в этих областях, построенные при использовании не точных, а асимптотических приемов. Такие условия называют "мягкими". При этом, искусственно задают на краях области нулевые производные вместо конечных реальных. Например, при решении задачи пограничного слоя считается, что вязкий поток у стенки без излома переходит в основной, центральный. Или также считается, что значение скоростей вдоль границы пограничного слоя в точности совпадает со значениями, полученными при невязкой постановке.

Часто так называемые "мягкие" условия используются при задании граничных условий на входе в сопло [5]. Изначально рассматриваются нестационарные течения. Эти условия в данном случае представляются в виде некоторых дифференциальных связей, наложенных на продольное и поперечное распределения скоростей или задаются в виде неких газодинамических параметров. При этом решение ведется опять же по неким выстроенным итерационным слоям. При этом предполагается, что представленные таким образом граничные условия будут эволюционизировать к своему стационарному значению.

Существует несколько вариантов постановок краевых задач, в том числе, когда граничные условия задаются на характеристиках. Такие задачи в честь великого французского математика Эдуарда Жана-Батиста Гурса, называются задачами Гурса. Часто в качестве граничных условий на входе эта задача решается для сверхзвуковых сопел. Кроме того, на базе этой задачи построен метод решения обратной задачи теории сопла.

Традиционная задача, которая в настоящее время решается на базе уравнения Эйлера, помимо первого граничного слоя (на стенке) предполагает и второе граничное условие на оси сверхзвукового сопла. Это второе граничное условие называется условием симметрии. В данной постановке еще в качестве начальных условий распределения параметров потока задаются результаты расчета по одномерной теории. При этом считается, что радиальная скорость на оси сопла равна нулю, а далее поперек сопла она задается линейной. Эта традиционная постановка задачи по-прежнему страдает серьезными упрощениями как по части используемого в расчетах "невязкого" и "несжимаемого" уравнения Эйлера, так и по части граничных условий, которые не приспособлены для описания этих фундаментальных свойств течений (вязкость, сжимаемость). Поэтому при внимательном анализе данная постановка кажется искусственной. Совершенно очевидно, что она имеет только методологическую ценность и требует дальнейшего внимательного рассмотрения на предмет корректности.



Э.Ж.-Б. Гурса

Постановка краевой задачи о течении вязкого сжимаемого газа в камерах сгорания и соплах ракетных двигателей

Анализ литературы показывает, что в настоящее время отсутствует четкая постановка краевой задачи о течении вязкой сжимаемой подвижной среды в условиях проточного тракта РД. Все известные постановки базируются на уравнении Эйлера с использованием "невязких" граничных условий. Задачи на базе уравнений Рейнольдса не являются корректными. Но! Если взять за основу известные наработки по так называемому идеальному, совершенному, ... газу, то можно, используя свойства реального газа, поставить новую краевую задачу, учитывающую перечисленные свойства.

Для ламинарного случая воспользуемся уравнением, записанным в вводящей части. Умышленно не будем затрагивать область турбулентного течения внутри камеры сгорания, так как при постановке граничных условий для этого случая (турбулентного) они будут, безусловно, несколько скорректированы. Это дальнейшая работа и она потребует своих специальных объяснений физических процессов.

Итак, считаем, что реализуется для всего ракетного двигателя только ламинарное течение и в камере и, тем более, в сверхзвуковом сопле. При этом расчетная область остается прежней. Она ограничена стенками камеры и сопла, осью камеры и входным и выходным сечениями. Не забывая о дополнительных условиях, описанных несколько раньше, и "мягких" граничных условиях на входе запишем основные четыре условия на границах. Первое - это условие прилипания у стенки: $y = r_w; V_{||} = 0$. Второе условие, как условие на оси, запишется с использованием особенностей вязкого потока. Очевидно, что вязкое воздействие двух соседних линий тока, расположенных вдоль оси, и касающихся ее, не приведет к появлению разности их продольных скоростей. Вдоль линий тока у оси скорости будут одинаковы. И совершенно очевидно, что трение линий тока друг о друга будет равно нулю. Вот - главная идея постановки второго граничного условия: трение между соседними линиями тока равно нулю. Частицы газа на линиях тока как бы сопровождают друг друга. И тогда можно записать: $y = 0; dV_0/dy = 0$. То есть производная продольной скорости по нормальной координате на оси равна нулю.

Третьим условием будет условие равенства нулю нормальной к стенке скорости (аналог условия непротекания). Четвертым условием - условие симметрии на оси. Оно такое же, как условие для "идеальной" жидкости: перпендикулярная оси скорость на самой оси равна нулю.

Таким образом, краевая задача поставлена. Векторное уравнение для ламинарного случая записано и граничные условия прилипания (для стенки) и сопровождения (для оси) определены. Теперь расчет для ламинарного случая можно проводить. Но! Поскольку ламинарный случай течения в двигателе реализуется не везде и не всегда, следует ограничить его от возможных областей появления турбулентного течения. Сразу оговоримся, не того традиционного рейнольдсовского турбулентного течения с непонятными пульсациями, а турбулентного течения, отражающего физический смысл и связанный с детерминированным взглядом на природу вещей. А это значит, что турбулентность это не просто "буль-буль", а последовательность усложняющихся регулярных когерентных структур. Не загромождая текст ссылками на работы автора, еще раз зафиксируем последовательность этих усложняющихся конфигураций турбулентного течения, представляющих из себя каждый раз очень стабильную, устойчивую конструкцию потока в зависимости от возрастания числа Рейнольдса. Все начинается с ламинарности ($Re \sim 0$). Далее при $Re \uparrow$ появляются последовательно друг за другом волны Толмина-Шлихтинга, градиентные волны Кельвина-Гельмгольца, вихри Тейлора-Гертлера, торсионные жгуты и, наконец, после долгого "матия" газа, когда скорость достигает скорости звука при критических условиях, то есть тепловой скорости, вновь приходим к ламинарному течению. И уже далее в сверхзвуке реализуется только (!) ламинарное течение, а вся турбулентность в сверхзвуке проявляется через ударные волны. Да-

лее для анализа выделим момент, когда может возникнуть турбулентность. Первые предпосылки - это волны Толмина-Шлихтинга. Поэтому будем считать их начало границей ламинарного слоя в соответствии с сформулированной выше задачей. То есть отсечем этой границей область турбулентного течения. Саму границу - место начала течения Толмина-Шлихтинга, рассчитаем в соответствии с работой [6], где представлена зависимость.

$$Y = \frac{1}{\kappa} \sin \kappa x + c,$$

где Y и x - координаты разделительной линии; κ и c - постоянные величины.

Воспользуемся также решением Толмина, дающем зависимость для скорости потока на этой границе, которая отделяет ламинарный слой [7]. При этом пока не будем менять оригинальное обозначение параметров:

$$\left(\frac{u_\infty \delta_1}{\nu} \right)_{кр} = 950.$$

Далее, если появится необходимость в расчете пограничного слоя, возможно будет единообразно, в одних обозначениях, представить данное соотношение. В настоящем случае это не является главной задачей, а лишь иллюстрацией возможностей. И еще. Если при расчетах не требуется самого газового поля внутри пристенного слоя, а необходимо знать только производную на стенке

$$\left(\frac{du}{dy} \right)_w,$$

например расчета трения и теплообмена, то решение задачи на этом можно остановить. 

Литература

1. Ю.М. Кочетков. Турбулентность на шероховатых стенках и новые фундаментальные уравнения пограничного слоя // Двигатель № 3, 2015 г.
2. Ю.М. Кочетков. Турбулентность сверхзвуковых течений. Памяти Гилевича // Двигатель № 1, 2013 г.
3. К. Кузов. Мир без форм // М. Мир, 1976 г.
4. В.Я. Лихушин. Теория теплообмена // М. Центр Келдыша, 1998 г.
5. А.М. Губертов, В.В. Миронов, Р.Г. Голлендер и др. Процессы в гибридных ракетных двигателях // М. Наука, 2008 г.
6. Ю.М. Кочетков, Н.Ю. Кочетков. Турбулентность. Волны Толмина-Шлихтинга // Двигатель № 1, 2014 г.
7. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя // М. Наука. 1974 г.

Связь с автором: swgeorgy@gmail.com

