УДК 532.526.4

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
РЕОЛОГИЯ И РЕЛАКСАЦИЯ

Александр Иванович Бажанов, академик МИА
Николай Юрьевич Кочетков, к.т.н., старший преподаватель ФГБОУ ВО "МАИ (НИУ)"
Анатолий Алексеевич Сперанский, вице-президент РИА, DExpert ISCED, академик РИА и МИА

Представлено систематическое изложение фундаментальных понятий реологии науки, описывающей свойства реальных рабочих тел (твердых, жидких и газообразных). Подробно рассмотрены модели, построенные на базе электрической аналогии и проанализированы уравнения, описывающие модельные задачи, претендующие на реальные условия. Проанализированы классические подходы к описанию реологических и релаксационных процессов Кельвина, Максвелла, Френкеля и др. Разобраны известные примеры практического применения моделей Максвелла и Фойгта. Предложен новый способ определения релаксационных функций с помощью нормальной функции насыщения.

A systematic presentation of the fundamental concepts of rheology the science describing the properties of real working bodies (solid, liquid and gaseous) is presented. Models constructed on the basis of electrical analogy are considered in detail and equations describing model problems claiming to be real conditions are analyzed. Classical approaches to the descrip tion of rheological and relaxation processes of Kelvin, Maxwell, Frenkel, etc. are analyzed. The wellknown examples of practical application of Maxwell and Voigt models are analyzed. A new method for determining relaxation functions using the normal saturation function is proposed.

Ключевые слова: реология, релаксация, модель процесса, нормальная функция насыщения.
Keywords: rheology, relaxation, process model, normal saturation function.

Физико-химическая кинетика и статистическая физика снабжают расчетные исследования исходными данными в виде свойств такие науки как механика сплошной среды, теория упругости, механика жидкости и газа, механика твердого тела и др. Такие свойства как вязкость, сжимаемость, теплопроводность присутствуют в уравнениях молекулярной акустики, которая тесно связана с молекулярной физикой и кинетикой.

Совершенно ясно, что процессы, происходящие на макро уровне тесно связаны и дополняются микроскопическими движениями внутри тел, и в зависимости от фазы рабочего тела (твердая, жидкая, газообразная) эти процессы сильно различаются. Так, например, основным свойством твердого тела является упругость, жидкого текучесть, а газообразного сжимаемость. Все эти свойства справедливы для так называемых идеальных фаз. Идеальным так же является газ без вязкости. Это конечно гипотетический случай, но он часто необходим для анализа. Свойства фаз проявляются часто отнюдь не в чистом виде: упругое тело, вязкая жидкость и т.д., а в комбинированном. И тогда необходимо учитывать каждое из свойств в их совокупности и взаимосвязи.

Движение сплошной среды, как и абсолютно твердого тела происходят под действием сил [1]. По характеру действия, вне зависимости от конкретной природы различают два класса сил: массовые и поверхностные. Массовыми силами называют силы, величина которых пропорциональна массе среды, на которую они действуют. Это гравитационные, электромагнитные силы, силы инерции. Поверхностными силами называют силы, величина которых пропорциональна площади поверхности, на которую они действуют. Это силы давления и трения. Причины, которые вызывают движение и внутренние напряжения, это силы внешние и внутренние. Внешние силы по отношению к системе - те, которые вызваны другими системами, а внутренние частями самой системы.

Деформация тел

В недеформируемом теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. Это значит, что в некотором выделенном объёме равнодействующая всех сил, действующих на этот объём со стороны других частей равна нулю. При деформировании же расположение молекул меняется и тело выводится из состояния равновесия, в котором находилось первоначально. Если тело не деформировано, то внутреннее напряжение в нём отсутствует. Если же оно деформировано, то в каждой точке присутствуют нормальное $P_н$ и касательное τ напряжение.

$$P_н = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S}; \ \tau = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_\tau}{\Delta S}.$$

Если перенести данные рассуждения на трехмерный случай, то для элементарного объёма будет актуальным тензор напряжений с нормальными напряжениями по диагонали (давление) и касательными (сдвиг):

$$\begin{Bmatrix} P_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & P_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & P_{33} \end{Bmatrix}$$

Этот тензор называется тензором напряжений Коши.

Многие определяющие соотношения в механике отражает связь тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, чем однозначно описывают свойства материала.

Характерной чертой движения сплошной среды является её деформация, то есть изменение расстояния между отдельными точками среды.

Компоненты тензора скоростей деформаций задаются следующим выражением:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right).$$

Напряжение давления и сдвига измеряются в Н/м^2 или Па (паскалях).

Как мы видели раньше, физические свойства вещества входят в различные системы уравнений (акустические, газодинамические и др.) через соотношение между напряжением и деформацией.

Связь между напряжением и деформацией называется реологическим уравнением состояния. А собственно наука реология - это наука о поведении различных текучих и пластичных тел при механическом нагружении [2, 3].

Реологические модели

Различают некоторое количество реологических моделей. В основную классификацию положено отличие ньютоновских и неньютоновских сред.

Исходные понятия реологии ньютоновская жидкость, вязкость которой не зависит от режима деформирования и идеальноеупругое тело, в котором в каждый момент времени величина деформации пропорциональна приложенному напряжению.

Эти понятия были обобщены для тел, проявляющих одновременно пластичные (вязкостные) и упругие свойства.

Практические приложения реологии описывают поведение конкретных материалов при нагрузках и трении.

Так, например, один из подходов в описании пассивных механических свойств биологических тканей заключается в замене реальной среды реологической моделью, которая отражает какое-нибудь определенное ее свойство или совокупность свойств.

Греческое словосочетание реология строится из слов течение и учение. Это (реология) - учение о течении. Это наука о деформациях и течении реальных сплошных сред.

Именно изменение деформации во времени и подразумевает термин течение.

Как следует из феноменологической теории, вязкость - это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одного слоя жидкостей относительно другого.

При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленных по касательной к поверхностям слоёв.

Особенность этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. А со стороны слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

С молекулярно-кинетического взгляда, вязкость объясняется следующим образом. В равновесном состоянии различие части фазы движутся друг относительно друга, при их относительном движении возникают факторы, стремящиеся уменьшить относительную скорость. То есть возникают силы торможения, или вязкость. Механизм этих сил в газах сводится к обмену импульсом упорядоченного движения между разными слоями газа, то есть и переносу импульса упорядоченного движения.

Поэтому возникновение сил трения в газах и жидкостях обусловлено процессом переноса импульса упорядоченного движения молекул.

Величина динамической вязкости зависит в основном от температуры так как средняя скорость молекул именно ей пропорциональна. От давления вязкость не зависит.

Под упругостью понимают способность тела возвращать свои формы и объём в первоначальное состояние после воздействия на него напряжением и появлением деформаций.

Характеристикой упругого движения является модуль упругости, который для идеального упругого тела является величиной постоянной.

При изучении свойств вещества неизбежно требуется реологическое уравнение состояния. То есть зависимость появляющихся деформаций от приложенных напряжений (или наоборот напряжений от деформаций). Для текучих сред удобнее использовать скорости деформаций.

Как было показано, все реальные вещества от очень упругих до текучих находятся в интервале между двумя крайними значениями физических свойств. То есть между упругостью, характеризующуюся модулем упругости (Юнга) E и вязкостью - динамической вязкостью Ньютона η.

Кроме того, реологическое уравнение состояния определяется внешним напряжением σ, деформацией ε и скоростью деформации ε. Другими словами, все вещества находятся внутри между абсолютно упругими (гуковскими) и абсолютно вязкими (ньютоновскими). По этому их реологические уравнения состояния будут характеризоваться некими эквивалентными вязкоупругими коэффициентами, зависящими от особенностей вещества (тела).

На сегодняшний день существует достаточно много реологических уравнений состояния для материалов и рабочих тел, характеризующих некое приближение к реальности процессов для неньютоновских жидкостей.

Реологические уравнения

Наибольший интерес при изучении свойств вещества вызывает экспериментальное (из акустических измерений) и теоретическое из молекулярных теорий нахождение реологического уравнения состояния, связывающего напряжение с деформациями. Но, к сожалению, таких решений, весьма мало и обычно предсказания делают с помощью феноменологических подходов, используя разнообразные модели и их сочетания [4].

Простейшее реологическое уравнение состояния, это - закон Гука для идеального упругого тела $\sigma = E\cdot\varepsilon$.

Как уже говорилось представление для твердых тел в таком виде является общепринятым. Для газов и жидкостей это уравнение состояния выводится из уравнений сохранения.

Работает это уравнение в весьма узком диапазоне малых деформаций, а само тело предполагается изотропным. Только в этом случае тензор деформации можно выразить с помощью свободной энергии тела F:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}}\right)_T .$$

Другое простейшее реологическое уравнение состояния - закон Ньютона для вязкого течения

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon},$$

который характеризуется линейным профилем скорости потока у стенки. При этом предполагается, что поток благодаря наличию вязких сил к ней прилипает, а последующие слои равномерно сдвигаются друг относительно друга (рис. 1).

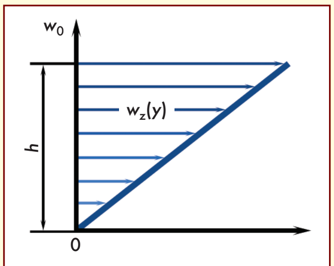


Рис. 1 Сдвиг слоёв из-за наличия вязких сил

Чтобы придать реологическим моделям большую наглядность разрабатывают механические модели и выстраивают простейшие схемы, используя электрическую аналогию. При этом пружиной обозначают чисто гуковские тела, а демпфером - вязкие ньютоновские (рис. 2).

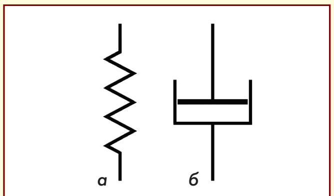


Рис. 2 Механические модели среды: а - упругой, б - вязкой

Модели Гука и Ньютона являются одноэлементными и в практических задачах встречаются весьма редко. Поэтому естественным считается разработка более сложных двухэлементных и даже трехэлементных моделей.

С помощью таких моделей можно выяснить многие свойства среды без всяких вычислений. Так уже с первого взгляда на модель кельвиновской среды (рис. 3) можно видеть, что мгновенная деформация в ней невозможна: что бы растянуть демпфер с бесконечно большой скоростью необходимо бесконечная сила.

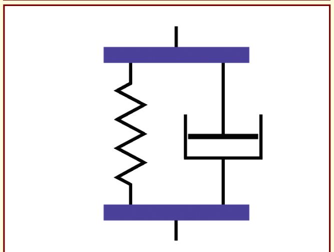


Рис. 3 Механическая модель кельвиновской среды

Если же приложено постоянное конечное напряжение f_0, то деформация будет развиваться постепенно, пока не достигнет равновесного значения, зависящего от жесткости пружины.

Точно так же для максвеловской среды видно, что при постоянном напряжении она может неограниченно течь (рис. 4).

Если же мгновенно создать деформацию, приложив силу растяжения f_0, то пружина растянется (демпфер не успеет растянуться), а затем будет постепенно сокращаться, растягивая демпфер. При этом сила, необходимая для поддержания постоянного удлинения всей модели, будет уменьшаться. Начнется процесс релаксации [5, 6].

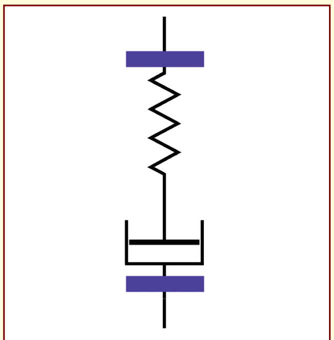


Рис. 4 Механическая модель максвеловской среды

Существуют более сложные модели сред (рис. 5 - "Механическая модель кнезеровской среды"; рис. 6 - "Механическая модель для продольных волн в жидкости с равновесной объёмной упругостью K, сдвиговой вязкостью (η') и релаксирующей объёмной вязкостью (η''); рис. 7 - "Механические модели Френкеля и Образцова для деформации: *а* - объёмной, *б* - сдвиговой").J

Рис. 5

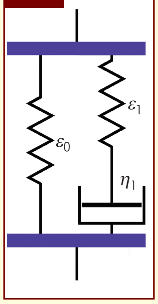


Рис. 6

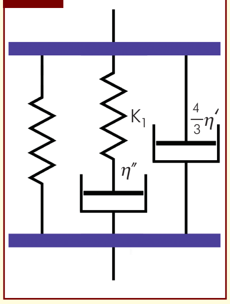
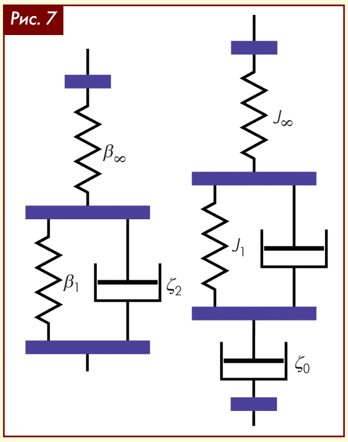


Рис. 7



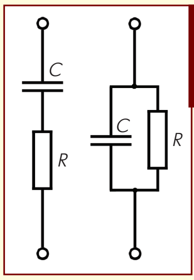


Рис. 8 Электрические модели:
а - среда Кольвина,
б - среда Максвела

Иногда используют преобразованные модели по аналогии с электрическими элементами. Это дает возможность применить математический аппарат для расчета неньютоновских жидкостей (рис. 8).

Имеются модели для вязкопластических (тела Шведова) жидкостей. Степенная модель с тремя различными типами реологического поведения: $\sigma = k \cdot \dot{\varepsilon}^n$,

1) если степень n < 1 - жидкость разжижается при сдвиге (псевдопластические, неньютоновские жидкости).

2) n = 1, k = η - ньютоновская жидкость.

3) n > 1 - дилатантная жидкость (загустевает при сдвиге).

На рис. 9 изображены реологические кривые, соответствующие различным классификациям жидкостей, поведение которых можно описать при помощи степенного закона.

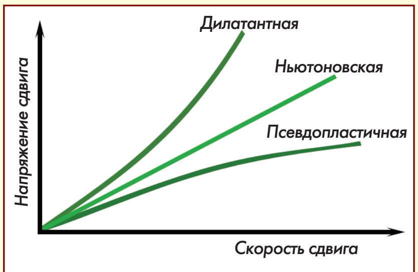


Рис. 9 Реологические кривые

Рациональность использования механических моделей

Рассмотрим более подробно модели Максвелла и Кельвина-Фойгта [7, 8] и проиллюстрируем на классических примерах рациональность использования механических моделей в целях использования свойств реологических неньютоновских тел.

Известно, что биологические ткани, такие как: мышцы, сухожилия, кровеносные сосуды, легочная ткань и др. сочетают в себе упругие и вязкие свойства. В результате механические свойства этих тканей можно моделировать сочетанием идеально упругих и вязких элементов. Взяв совокупность моделей можно более-менее адекватно описать механические свойства реальной биологической среды.

Тело Максвелла - это тело, которое под действием напряжения упруго деформируется и в то же время может течь. Это одна из возможных моделей мягких биологических тканей. Представляет собой последовательно соединенные упругие и вязкие элементы. Общая деформация подобного тела под влиянием, например, сдвиговых напряжений равна сумме его упругой деформации и деформации течения, т.е.:

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_\eta \text{ или } \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_E + \dot{\varepsilon}_\eta,$$

где ε, как и раньше, означает дифференцирование ε по времени. При этом,

$$\sigma = \sigma_E + \sigma_\eta.$$

Т.е., напряжения на упругом и вязком элементах тела равны. Скорость упругого смещения можно определить из закона Гука, а скорость течения из закона Ньютона:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}.$$

Пусть тело подвергается деформации и затем удерживается в этом состоянии. В таком случае ε = const, $\dot{\varepsilon} = 0$ и уравнение сводится к следующему:

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = 0.$$

Разделим переменные в уравнении и проинтегрируем его:

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta}\int_0^1 dt.$$

Или

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{\eta}t}.$$

Таким образом, ослабление напряжения в теле со временем носит экспоненциальный характер и характеризуется временем релаксации

$$t = \eta / E.$$

Уменьшение напряжения при постоянной нагрузке носит название релаксации напряжения. Начальное напряжение $\sigma = \sigma_0 = \sigma_{упр} = \varepsilon E$, обусловленное упругостью элемента E, постепенно исчезает из-за необратимой деформации в вязком элементе η. Время, в течение которого напряжение уменьшается в e раз (до $\approx 0{,}37\sigma_0$) называется временем релаксации (см. рис. 10) Если время воздействия на систему t много меньше времени релаксации ($t \ll \tau$), то система проявляет только упругие свойства.

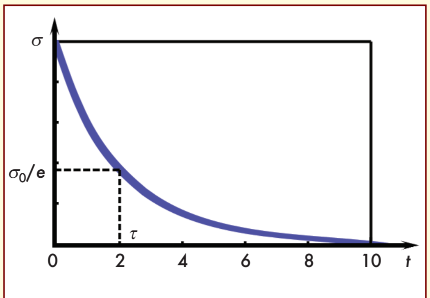


Рис. 10 Зависимость напряжения от времени и время релаксации в модели Максвелла

При изотоническом наложении напряжения в некоторый момент пружина начинает мгновенно растягиваться на величину σ/E, а поршень начинает равномерно перемещаться со скоростью σ/η. Когда в некоторый другой момент напряжение снимается, пружина мгновенно сокращается, но поршень остаётся в выдвинутом положении.

Численное решение такого поведения при σ = const даёт интегрирование уравнения:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta}t$$

и характерно также для модели Ньютона.

Гладкие и скелетные мышцы ведут себя в основном подобно телу Максвелла. Это способствует большей растяжимости полых органов, например, кровеносных сосудов, обладающих гладкомышечной мускулатурой. В таком случае её можно представить в виде вязкоупругой системы с параллельно расположенными вязким и упругим элементами и запаздывающей упругой реакцией. Если к такой системе приложить постоянную силу, то пружина растянется, но вязкий элемент не позволит этому процессу произойти быстро: поршень будет постепенно вытягиваться. Если сиять нагрузку, то пружина будет сжиматься постепенно, т.к. быстрому сжатию будет мешать вязкий элемент.

Поведение тела Кельвина-Фойгта описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\sigma = \sigma_E + \sigma_\eta = E_\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon},$$

т.е. полное напряжение распределяется между упругим и вязкими элементами.

При растяжении в условиях постоянного приложенного напряжения σ = const решение данного уравнения будет:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

где $\tau = \eta/E$ - время запаздывания (ползучести, релаксации), $\varepsilon_\infty = \sigma/E$ - максимальная относительная деформация.

Зависимость относительной деформации от времени у модели Кельвина-Фойгта показана на рис. 11. После снятия постоянного напряжения образец будет медленно возвращаться к своей первоначальной форме, также следуя экспоненциальной кривой (экспоненциальная ползучесть).

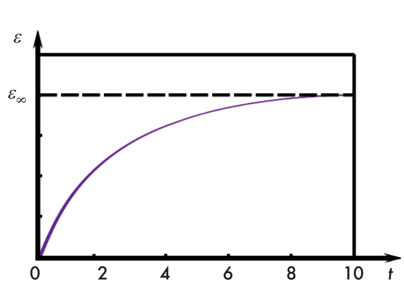


Рис. 11 Зависимость деформации от времени в модели Кельвина-Фойгта

Последнее написанное уравнение с экспоненциальным членом может трактоваться как приближённое в силу ограниченности модели.

Вспоминая нормальную кривую насыщения [9, 10], воспользуемся ею для написания последующего соотношения: $\varepsilon = \varepsilon_\infty \psi(\xi)$,

где ε_∞ - по-прежнему максимальная относительная деформация;

$\psi = \varepsilon/\varepsilon_\infty$ - коэффициент релаксации.

Значение

$$\xi = \frac{\tau}{\tau_{\text{рел}}} = \frac{\tau E}{\eta},$$

где $\tau_{\text{рел}} = \eta/E$.

Тогда окончательно

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\xi} e^{1-\frac{1}{\xi}} \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\infty} = \frac{\eta}{\tau E} e^{1-\frac{\eta}{\tau E}}.$$

Изложение теории реологии предполагает знания основных свойств, описываемых с её помощью сред. И это основная трудность: где взять E и η для реальных веществ?

Остается надеяться только на возможности молекулярной акустики. В случае синусоидальной нагрузки можно использовать уравнения для скорости и поглощения звука, зависящих от частоты, а по ним восстанавливать вязко-упругие свойства. Д

Литература

1. Л.Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа // Дрофа, М. 2005 г.
2. Рейнер М., Десять лекций по теоретической реологии // Гостехиздат, 1947 г.
3. Реология. Теория и приложения. Сб. статей под. ред. Ф. Эйриха, ИЛ, 1962 г.
4. И.Г. Михайлов, В.А. Соловьев, Ю.П. Сырников. Основы молекулярной акустики //изд. Наука, 1964 г.
5. Ю.М. Кочетков, Н.Ю. Кочетков. Турбулентность. Математический анализ релаксационных процессов // Двигатель № 3, 2020 г.
6. Ю.М. Кочетков, Н.Ю. Кочетков. Турбулентность. Кинетическое уравнение Больцмана // Двигатель № 3, 2021 г.
7. Thomson W. (Kelvin), Elasticiti, Encyclop. Brit., 9-th ed., London, 1985.
8. Voiqt W. Ueber die innere Reibung der festen Korper, insbesondere der Krictalle, Abh. konigl Gessel. Wiss. Gottingen, Math., K1., 36, 3, 1890.
9. Н.Ю. Кочетков. Разработка и верификация метода и программы расчета внутрибаллистических характеристик двигателей твердого топлива с двухсоставными зарядами для перспективных летательных аппаратов // Космонавтика и ракетостроение № 1, 2010 г.
10. Ю.М. Кочетков. Турбулентность. Закон пси от кси // Двигатель № 2, 2017 г.

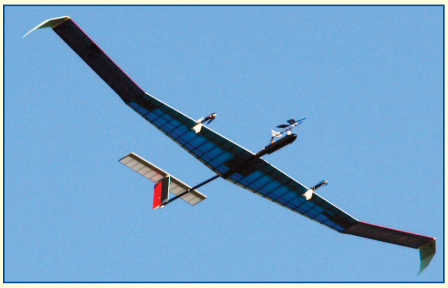
Связь с авторами: kolabuy@gmail.com

ИНФОРМАЦИЯ. Новые рекорды БПЛА

В журнале "Двигатель" №4 - 2018 г. была опубликована статья о том, что британская компания QuinetiQ в 2003 г. приступила к разработке беспилотных летательных аппаратов под названием "Zephyr", способных осуществлять многомесячные полеты в стратосфере на высотах порядка 30 км на электрической энергии, получаемой от бортовых аккумуляторов и солнечных батарей.

В начальной версии БПЛА "Zephyr" имел размах крыльев 18 м, а взлетную массу - 31 кг. В первом полёте продолжительносью 54 ч была достигнута высота 18 000 м. Следующая модификация с размахом крыла 22,5 м и массой 50 кг в 2008 г. продержалась в воздухе 82 ч 37 мин. В дальнейшем, благодаря ультралегкому карбоновому корпусу и новой аэродинамической форме, удалось в 2010 г. продержалась в воздухе 168 ч. Следующий рекордный полёт продолжительностью 11 суток состоялся в 2014 г. на высоте более 23 км, и тогда впервые на борту была установлена полезная нагрузка.

Если на всех этих ЛА отрабатывались отдельные элементы конструкции и система управления полётом, то в 2018 г. состоялся первый полёт беспилотника "Zephyr", выполненного уже в серийной версии. Тогда аппарат достиг рекордной для своего класса высоты - 21 562 м, а в воздухе он продержался 25 дней 23 ч и 57 мин. В ноябре 2020 г. сос-



тоялись испытания модернизированной версии серийного варианта. В сентябре 2021 г. БПЛА "Zephyr-S" были завершены очередные испытания, в ходе которых был установлен новый рекорд высоты - 23 915 м. К этому моменту общий налёт всех аппаратов типа "Zephyr" достиг 2435 часов.

Два электродвигателя мощностью по 0,6 л.с обеспечивают БПЛА массой 75 кг крейсерскую скорость порядка 32 км/ч (максимальная скорость полета ограничена 50 км/ч).

Предполагается, что БПЛА "Zephyr" будут изготавливаться в двух версиях: однофюзеляжном - "Zephyr-S" и двухфюзеляжном - "Zephyr-T", который отличается увеличенным размахом крыла, позволяющем нести до 20 кг полезной нагрузки.

В ходе создания, испытания и модернизации БПЛА использовались различные типы аккумуляторов. На первых машинах стояли серно-литиевых аккумуляторы, разработанные компанией Sion Power Inc. Затем настала очередь литий-ионных аккумуляторов компании Amprius. На последней версии БПЛА "Zephyr-S" для хранения электрического заряда используются литий-ионные нанопроводниковые аккумуляторы той же компании Amprius. У разработчиков появилась уверенность, что новые, более эффективные батареи позволят увеличить продолжительность беспосадочного полёта до полугода. Д